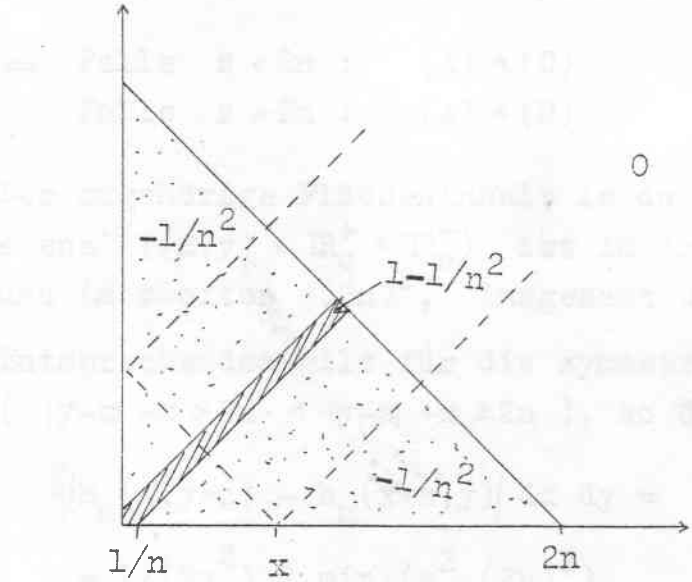
B Approximierende Diagonalen

B 1 $K = (\mathbb{R}, (\mathrm{id}, -\mathrm{id}))$

Behauptung:

$$f_n(x,y) := \frac{1}{2}\begin{cases} 1 - 1/n^2 & \text{für } |x-y| < 1/n, \quad x+y < 2n \\ - 1/n^2 & \text{für } |x-y| \geq 1/n, \quad x+y < 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine approximierende Diagonale für $L^1(K)$.



Beweis:

(i) α) Definiere $\quad h_n(x,y) := \begin{cases} -1/n^2 & \text{falls } x+y < 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow h_n(x * z, y) = 1/2\ (h_n(|x-z|, y) + h_n(x+z,y))$$

$$= \begin{cases} -1/n^2 & \text{falls } x+y+z < 2n \\ -1/(2n^2) & \text{falls } |x-z| + y < 2n \leq x+y+z \\ 0 & \text{falls } 2n \leq |x-z| + y \end{cases}$$

und $h_n(x, y*z) = 1/2\ (h_n(x, |y-z|) + h_n(x, y+z))$

$$= \begin{cases} -1/n^2 & \text{falls } x+y+z < 2n \\ -1/(2n^2) & \text{falls } x+|y-z| < 2n \leq x+y+z \\ 0 & \text{falls } 2n \leq x+|y-z| \end{cases}$$

$$|h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)| =$$

$$= \begin{cases} 1/(2n^2) & \text{falls } |x-z| + y < 2n \text{ und } |y-z| + x \geq 2n \\ & \text{oder } |y-z| + x < 2n \text{ und } |x-z| + y \geq 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir untersuchen die Bedingungen in der ersten Zeile weiter:

$$
\begin{aligned}
&(|x-z| + y < 2n \quad \wedge \; |y-z| + x \geq 2n \\
\Leftrightarrow\; &(x+y < z+2n \quad \wedge \; x-y > z-2n) \\
&\wedge (x+y \geq 2n+z \;\vee\; x-y \geq 2n-z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\; & x+y < z+2n && \text{(Bedingung (A))} \\
& \wedge x-y > z-2n && \text{(Bedingung (B))} \\
& \wedge x-y \geq 2n-z && \text{(Bedingung (C))}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\; & \text{Falls } z < 2n: && (A) \wedge (C) \\
& \text{Falls } z \geq 2n: && (A) \wedge (B)
\end{aligned}
$$

Der zugehörige Flächeninhalt in der (x,y)-Viertelebene $((x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ ist im ersten Fall z^2 und im zweiten $(2n)^2$, insgesamt also $\min(z^2,(2n)^2)$.

Entsprechendes gilt für die symmetrische Bedingung $(\;|y-z| + x > 2n \;\wedge\; |y-z| + x \geq 2n\;)$, so daß insgesamt gilt:

$$
\begin{aligned}
&\iint |h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)|\, dx\, dy = \\
&= 1/(2n^2) \cdot 2 \min \cdot (z^2,(2n)^2). \\
&= \min((z/n)^2,\, 4).
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varphi \in L^1(K)$

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi \cdot h_n - h_n \cdot \varphi\|_1 = \\
&= \iint \left| \int \varphi(z)\, h_n(z^- * x, y) - h_n(x, y*z)\, \varphi(z^-)\, dz \right| dx\, dy \\
&\leq \iiint |\varphi(z)|\, |h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)|\, dz\, dx\, dy \\
&= \int |\varphi(z)| \iint |h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)|\, dx\, dy\, dz \\
&= \int |\varphi(z)| \min((z/n)^2,\, 4)\, dz \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

β) Definiere $g_n(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |x-y| < 1/n \text{ und } x+y < 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
g_n(x*z,y) &= 1/2\,(g_n(\,|x-z|\,,\; y) + g_n(x+z,y)) \\
&= 1/2 \begin{cases} 1 & \text{falls } \left||x-z| - y\right| < \frac{1}{n} \text{ und } |x-z|+y<2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&+ 1/2 \begin{cases} 1 & \text{falls } |x+z-y| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad x+z+y<2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Es ist $\quad ||x-z|-y|<1/n$

$$\Leftrightarrow \ |x-z-y| < 1/n \ \vee \ |x-z+y|<1/n$$

Sei nun

$$A(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |-x+y+z| <1/n \ \wedge \ |x-z| +y < 2n\}$$

$$B(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |x-y+z| <1/n \ \wedge \ x+y+z < 2n\}$$

$$C(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |x+y-z| <1/n \ \wedge \ |x-z| +y < 2n\}$$

Dann ist

$$g_n(x*z,y) = 1/2 \ (\chi_{A(z)}(x,y) + \chi_{B(z)}(x,y) + \chi_{C(z)}(x,y) - \chi_{A(z)\cap C(z)}(x,y) \ )$$

(χ: Charakteristische Funktion)

Entsprechend erhält man durch Vertauschen der Rollen von x und y:

$$g_n(x,y*z) = 1/2 \ (\chi_{A'(z)}(x,y) + \chi_{B'(z)}(x,y) + \chi_{C'(z)}(x,y) - \chi_{A'(z)\cap C'(z)}(x,y) \ ) \ ,$$

wobei

$$A'(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |x-y-z|<1/n \wedge |y-z| +x < 2n\}$$

$$B'(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |-x+y+z|<1/n \wedge x+y+z < 2n\}$$

$$C'(z) := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |x+y-z|<1/n \wedge |y-z| +x < 2n\}$$

Wir nehmen für eine Weile an, daß $z<n/2$ und $n \geq 2$. Dann folgt aus $|x+y-z|<1/n$, daß $x+y<n$ und damit, daß $|y-z| +x <2n$.

Also ist $\quad C'(z) = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : |x+y-z| <1/n\}$

und damit $\quad C'(z) = C(z)$.

Es gilt somit:

$$|g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|$$
$$\leq 1/2 \ (|\chi_{A(z)}(x,y) - \chi_{B'(z)}(x,y)| + \chi_{A(z)\cap C(z)}(x,y) + |\chi_{B(z)}(x,y) - \chi_{A'(z)}(x,y)| + \chi_{A'(z)\cap C'(z)}(x,y) \ ) \ .$$

Zur Abschätzung der L^1-Norm genügt es also die Flächeninhalte von $A(z) \setminus B'(z)$ und $A(z) \cap C(z)$ zu bestimmen. ($A'(z) \setminus B(z)$, sowie $A'(z) \cap C'(z)$ sind dazu symmetrisch.)

$(x,y) \in A(z) \setminus B'(z)$

$\Leftrightarrow \quad |-x+y-z| < 1/n \;\wedge\; |x-z| + y < 2n \;\wedge\; x+y+z \geq 2n$

$\Leftrightarrow \quad |-x+y-z| < 1/n \;\wedge\; x-z+y < 2n \;\wedge\; x-z-y > -2n$
$\qquad \wedge\; x+y+z \geq 2n$

$\Rightarrow \quad z - 1/n < y - x < z + 1/n \;\wedge\; 2n - z \leq x+y < 2n + z$

Daraus ist zu entnehmen, daß:

Flächeninhalt$(A(z) \setminus B'(z)) \leq 2 \cdot (1/n) \cdot 2 \cdot z = 4z/n$

Ähnlich schließt man, daß

$(x,y) \in A(z) \cap C(z) \;\Rightarrow\; |y| < 1/n \;\wedge\; z-1/n < x < z + 1/n$

und somit Flächeninhalt$(A(z) \cap C(z)) < 1/n^2$.

$$\Rightarrow \iint |g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy < 4z/n + 1/n^2$$

falls $z < n/2$ und $n \geq 2$.

Aus der Definition der g_n folgt unmittelbar, daß für beliebige $z \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\iint |g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy < 8$$

Also gilt für beliebige $z \in \mathbb{R}_0^+$, $n \geq 2$:

$$\iint |g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy < \min(16z/n + 1/n^2, 8)$$

Nun zeigt man wie in α), daß

$$\|\varphi \cdot g_n - g_n \cdot \varphi\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für } \varphi \in L^1(K)$$

γ) Da $f_n = 1/2(g_n + h_n)$ folgt mit α) und β), daß

$$\|\varphi \cdot f_n - f_n \cdot \varphi\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty, \quad \varphi \in L^1(K).$$

(ii) $(\pi f_n)(x) = \int f_n(x*z, z^-)\, dz$

$\qquad = \int 1/2\, (f_n(|x-z|, z) + f_n(x+z, z))\, dz$

Man überzeugt sich, daß dies einer Integration entlang der gestrichelten Linie in der letzten Zeichnung entspricht.

1. Fall: $x \geq 2n \;\Rightarrow (\pi f_n)(x) = 0$ (offensichtlich aus der Zeichnung)

2. Fall: $1/n < x < 2n$: Das Stück der Linie, das durch Gebiete mit den Funktionswerten $-1/(2n^2)$ läuft,

hat die Länge $(2n - 2/n^2)\sqrt{2}$ und dasjenige Stück, das durch das Gebiet mit dem Funktionswert $(1 - 1/n^2)/2$ läuft, die Länge $2/n^2 \cdot \sqrt{2}$. Mittelung ergibt: $(\pi f_n)(x) = 0$.

3. Fall: $x \leq 0$
Die Linie verläuft ausschließlich in Gebieten mit den Funktionswerten $\frac{1}{2}(1-1/n^2)$ und 0.
$\Rightarrow \ (\pi f_n)(x) = 2n \cdot (1 - 1/n^2)/2 = n - 1/n$

Somit ist gezeigt:

$$(\pi f_n)(x) = \begin{cases} n - 1/n & \text{falls } x \leq 1/n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ;$$

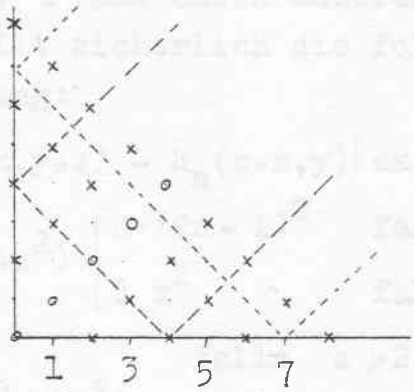
also ist (πf_n) eine approximierende Eins. $\square$

B 2 $\quad K = (\mathbb{Z}, (\mathrm{id}, -\mathrm{id}))$

Behauptung:

$$f_n(x,y) := 4 \begin{cases} 1/n & \text{für } x = y \leq n-1 \\ -1/(2n^2) & \text{für } x \neq y,\ x+y \text{ gerade} \\ & \text{und } x+y \leq 2(n-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine approximierende Diagonale.



hier: $n = 5$

o: $1/n$

x: $-1/(2n^2)$

Beweis:

(i) α) Sei $h_n(x,y) := \begin{cases} -1(2n^2) & \text{für } x+y \text{ gerade und } x+y \leq 2(n-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$h_n(z*x,y) = 1/2\ (h_n(|z-x|,y) + h_n(z+x,y))$$

$$= \begin{cases} -1/(2n^2) & \text{falls} \quad x+y+z \leq 2(n-1) \text{ und } x+y+z \quad \text{gerade} \\ -1/(4n^2) & \text{falls} \quad |z-x|+y \leq 2(n-1) < x+y+z \\ & \qquad \text{und} \quad x+y+z \quad \text{gerade} \\ 0 \quad \text{sonst} & \end{cases}$$

Entsprechend: $h_n(x,y*z) =$

$$= \begin{cases} -1/(2n^2) & \text{falls} \quad x+y+z \leq 2(n-1) \text{ und } x+y+z \quad \text{gerade} \\ -1/(4n^2) & \text{falls} \quad |z-y|+x \leq 2(n-1) < x+y+z \\ & \qquad \text{und} \quad x+y+z \quad \text{gerade} \\ 0 \quad \text{sonst} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)| =$$

$$= \begin{cases} 1/(4n^2) & \text{falls} \quad (\,|z-x|+y \leq 2(n-1) < |z-y|+x \quad \text{oder} \\ & \qquad |z-y|+x \leq 2(n-1) < |z-x|+y\,) \text{ und } x+y+z \text{ gerade} \\ 0 \quad \text{sonst} & \end{cases}$$

Es ist $\quad |z-x|+y \leq 2(n-1) < |z-y|+x \quad$ äquivalent zu

$$x+y \leq 2(n+1)+z \quad \text{und} \quad \begin{cases} x-y \geq z-2(n-1) & \text{falls } z > 2(n-1) \\ x-y > 2(n-1)-z & \text{falls } 2(n-1) \geq z. \end{cases}$$

Falls $z > 2(n-1)$ gibt es $(2n-1)^2$ Punkte (x,y), die dies erfüllen, und falls $2(n-1) \geq z$ gibt es z^2 solcher Punkte.

Das Haarsche Maß auf K ordnet dem Punkt 0 das Gewicht 1 und allen anderen das Gewicht $1/2$ zu. Also gilt sicherlich die folgende, sehr grobe Abschätzung:

$$\iint |h_n(x,y*z) - h_n(x*z,y)|\, dx\, dy$$

$$\leq 1/(4n^2) \cdot \begin{cases} 2 \cdot (2n-1)^2 & \text{falls} \quad z > 2(n-1) \\ 2\, z^2 & \text{falls} \quad z \leq 2(n-1) \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad z > 2(n-1) \\ z^2/(2n^2) & \text{falls} \quad z \leq 2(n-1) \end{cases}$$

$$\leq \min(z^2/(2n^2), 2) \quad .$$

Nun zeigt man wie in B 1, daß

$$\|\varphi h_n - h_n \cdot \varphi\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi \in L^1(K) \quad \text{und} \quad n \longrightarrow \infty .$$

ß) Definiere $g_n(x,y) := \begin{cases} c & \text{falls} \quad x = y \leq 2(n-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

wobei $c := 1/n + 1/(2n^2)$.

Dann gilt für $z \neq 0$:

$$g_n(x*z,y) = 1/2\ (g_n(|x-z|,y) + g(x+z,y)$$

$$= 1/2 \begin{cases} c & \text{falls} \quad x-z = y \leq 2(n-1) \\ & \text{oder} \quad z-x = y \leq 2(n-1) \\ & \text{oder} \quad x+z = y \leq 2(n-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= 1/2 \begin{cases} c & \text{falls} \quad (x,y) \in A(z) \cup B(z) \cup C(z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei
$$A(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : x-y = z \text{ und } y \leq 2(n-1)\}$$
$$B(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : x+y = z \text{ und } y \leq 2(n-1)\}$$
$$C(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : y-x = z \text{ und } y \leq 2(n-1)\}$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$g_n(x,y*z) = 1/2 \begin{cases} c & \text{falls} \quad (x,y) \in A'(z) \cup B'(z) \cup C'(z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei
$$A'(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : y-x = z \text{ und } x \leq 2(n-1)\}$$
$$B'(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : x+y = z \text{ und } x \leq 2(n-1)\}$$
$$C'(z) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : x-y = z \text{ und } x \leq 2(n-1)\}$$

Sei nun $z \leq 2(n-1)$; dann ist $B(z) = B'(z)$ und es gilt:

$$|g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)| =$$

$$= \begin{cases} c/2 & \text{falls} \quad (x,y) \in A(z) \setminus C'(z) \\ & \text{oder} \quad (x,y) \in A'(z) \setminus C(z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c/2 & \text{falls} \quad (x-y = z \text{ und } y \leq 2(n-1) < x) \\ & \text{oder} \quad (y-x = z \text{ und } x \leq 2(n-1) < y) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Wert $c/2$ wird also von $2z$ Punkten (x,y) angenommen. Also ist

$$\iint |g_n(x*y,z) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy \leq z \cdot c \leq 2z/n$$

$$\text{falls} \quad 0 \leq z \leq 2(n-1)$$

Aus der Definition der g_n folgt, daß für alle $z \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\iint |g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy < 2$$

Insgesamt haben wir also:

$$\iint |g_n(x*z,y) - g_n(x,y*z)|\, dx\, dy < \min(2\,,\, 2z/n)$$

und wie in B 1 sieht man, daß

$$\| \varphi g_n - g_n \varphi \|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi \in L^1(K) \quad \text{und} \quad n \longrightarrow \infty .$$

γ) Da $f_n = 4 \cdot (g_n + h_n)$ folgt aus α) und ß):

$$\| \varphi f_n - f_n \varphi \|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi \in L^1(K) \quad \text{und} \quad n \longrightarrow \infty .$$

(ii) Die folgenden Schritte sind leicht nachvollziehbar:

α) Für $x \neq 0$ erhält man $(\pi f_n)(x) =$

$$\int f_n(x*z,z)\, dz = \int 1/2\, (f_n(|x-z|,z) + f_n(x+z,z))\, dz$$

durch Aufsummieren der Werte entlang der gestrichelten Linie (siehe Zeichnung; dort ist $x = 4$ bzw. $x = 7$).

ß) Für $x > 2(n-1)$ oder x ungerade ist $(\pi f_n)(x) = 0$.

γ) Die Punkte (x,y) $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ haben gegenüber $(x,0)$ und $(0,y)$ wegen des Haarschen Maßes nur halbes Gewicht; also ist für $0 \neq x \leq 2(n-1)$ und x gerade $(\pi f_n)(x) = 4/4\ (\ (2n)(-1/(2n^2)) + 1/n\ ) = 0$.

δ) $(\pi f_n)(0) = \int f_n(z,z)\,dz = f(0,0) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} f(i,i) = \frac{n+3}{n}$

ε) $(\pi f_n)(x) = \begin{cases} (n+3)/n & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und damit ist (πf_n) eine approximierende Eins für $L^1(K)$.

(Bemerkung: Bei etwas ausgetüftelterer Wahl von f_n wäre πf_n exakt das Einselement in $L^1(K)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.) $\square$