ANHANG:

A Grundlagen und Notation

A 1 Allgemeines

A 1.1 Reelle Zahlen

Seien a, b, c $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; man definiere

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

analog $[a,b)$, (a,b), (Letzteres ist nur aus dem Zusammenhang von einem Element des kartesichen Produkts zu unterscheiden.)

$[c]$ die kleinste ganze Zahl, die kleiner oder gleich c ist.

A 1.2 Topologische Räume

Für einen topologischen Raum X und einer Teilmenge $A \subseteq X$ seien

$cl(A) = A^{cl}$ der topologische Abschluß,

$int(A) = A^{int}$ das Innere,

$b(A) = A^{b}$ der Rand,

$c(A) = A^{c}$ das Komplement von A .

A 1.3 Funktionenklassen und Funktionale

X sei ein topologischer Raum; dann ist

$C(X)$ die Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen auf X,

$CB(X)$ die Menge der beschränkten Funktionen in C(X),

$C_o(X)$ die Menge der Funktionen in C(X), die im Unendlichen verschwinden,

$C_{oo}(X)$ die Menge der Funktionen in C(X) mit kompakten Träger;

dabei ist der Träger spt(f) einer Funktion f definiert durch

$$spt(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}^{cl}$$

$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ bezeichne die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger, versehen mit der üblichen Topologie (vgl. Ru,6.2)

Mit $\mathbb{1}$ wird stets die konstante 1-Funktion bezeichnet. Die Schreibweise $f(x) = \underline{O(x^k)}$ bedeutet, daß $f(x)\cdot x^{-k}$ beschränkt bleibt für $x \to \infty$. Man sagt eine solche Abscätzung sei <u>bestmöglich</u>, falls $f(x)\cdot x^{-k'}$ nicht beschränkt bleibt für ein beliebiges $k' < k$ und $x \to \infty$. (Vorsicht: Hier wird das "="-Zeichen grob mißbraucht: aus $f(x) = O(x^k)$ und $g(x) = O(x^k)$ folgt keineswegs $f = g$.)

Für $f \in C(X)$ sei $\underline{\overline{f}}$ erklärt durch $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ (punktweise komplexe Konjugation).

Für eine Teilmenge A von X bezeichnet

$\underline{\|\ \|_A}$ $\quad(\|f\|_A := \sup\limits_{x \in A} |f(x)|)$ eine Seminorm und

$\underline{\|\ \|_\infty} := \|\ \|_X$ eine Norm auf Unterräume von $CB(X)$.

Wenn nun ein, mit einer Topologie versehener Funktionenraum B vorgegeben ist, dann heißen die stetigen, linearen Abbildungen von B nach $\mathbb{C}$ <u>Funktionale</u> und $\underline{B^*}$ bezeichnet die Menge aller Funktionale auf B. (Funktionale sind also per Definition stetig!) Der <u>Träger</u> $\underline{spt(\phi)} \subseteq X$ eines Funktionals $\phi \in B^*$ ist definiert durch:

$$x \notin spt(\phi) \Leftrightarrow \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } X \text{ mit der Eigenschaft } (f \in B,\ spt(f) \subseteq U \Rightarrow \phi(f) = 0)$$

A 1.4 Maßräume

Sei nun X ein lokalkompakter Raum und $x \in X$. dann bezeichne

$\underline{M(X)}$ die Menge aller regulären, komplxwertigen Borel-Maße auf X, versehen mit der $\sigma(M(X), C_{OO}(X))$-Topologie,

$\underline{M^+(X)}$ die Menge aller positiven Maße in $M(X)$,

$\underline{M^1(X)}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße in $M(X)$,

$\underline{M^\infty(X)}$ die Menge aller regulären Borel-Maße mit Werten in $[0, \infty]$,

$\underline{p_x}$ das Einheitspunktmaß bei x.

Für ein reguläres Borel-Maß μ und eine μ-integrierbare Funktion f sei

$\underline{\int f\, d\mu} = \underline{\int f(x)\, d\mu(x)}$ das Integral von f bezüglich μ, (Integrationsbereiche werden nur angegeben, soweit sie notwendig oder nützlich zum Verständnis sind.)

(Falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und μ das vom Lebesgue-Maß induzierte Maß ist, wird meist auf die Angabe von μ verzichtet: $\rightarrow \underline{\int f(x)\, dx}$)

$\underline{spt(\mu)} := spt(\phi)$, wobei $\phi(f) := \int f\, d\mu$, der Träger von μ,

$\underline{L^p(X,\mu)} := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f\ \mu\text{-integrierbar und } \|f\|_p < \infty\}$,

wobei $\underline{\|f\|_p} := (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p}$ falls $0 < p < \infty$

und $\underline{\|f\|_\infty} := \sup\limits_{x \in X} \mathrm{ess}|f(x)|$

$:= \sup\{a \in \mathbb{R}_0^+ : \mu\{x : |f(x)| > a\} > 0\}$

$\underline{P(X,\mu)} := \{f : f\ \mu\text{-integrierbar}, f \geq 0 \text{ und } \int f\, d\mu = 1\}$.

Bei den letzten beiden Funktionenklassen verzichtet man auf die Angabe von μ, wenn Klarheit über das zugrunde liegende Maß herrscht. ($\rightarrow \underline{L^p(X)}$, $\underline{P(X)}$)

(In den L^p-Räumen werden wie üblich Funktionen identifiziert, die sich nur auf μ-Nullmengen von X unterscheiden)

(Literatur: [Ha])

A 1.5 Banach-Algebren

Ein normierter vollständiger $\mathbb{C}$-Vektorraum B mit Algebra-Struktur heißt Banach-Algebra, wenn $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$. Als approximierende Rechtseins bezeichnet man ein Netz $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit der Eigenschaft $\lim x u_\alpha = x \quad \forall x \in B$. (Analog: approximierende Linkseins) Das Netz $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}_0^+$ gibt, mit $\|u_\alpha\| \leq M \quad \forall \alpha \in A$.

Die Menge der stetigen Algebra-Homomorphismen von B auf $\mathbb{C}$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie wird als Strukturraum von B, i.Z. $\underline{\Delta(B)}$ bezeichnet.

(Literatur: [BD])

A 2 Hypergruppen

Einen lesenswerten Abriß über den geschichtlichen Werdegang der Hypergruppen findet man in einem Artikel von K.A. Ross ([Ro]). Während die rein algebraischen Ursprünge bereits im Jahre 1934 zu suchen sind, dauerte es noch bis zur ersten Hälfte der 70'er Jahre, bevor leistungsfähige Axiomsysteme entwickelt wurden, welche die algebraische und die topologische Struktur von Hypergruppen untrennbar verketten. Offenbar war die Zeit reif dazu, denn etwa gleichzeitig, aber voneinander unabhängig haben Dunkl [Du], Jewett [J] und Spector [Sp 1] diese Axiomsysteme präsentiert, von denen zwar keine zwei identisch sind, die aber inhaltlich auf der gleichen Linie liegen (abgesehen davon, daß sich Dunkl auf kommutative Hypergruppen beschränkt). Die Zielrichtung war wohl jedes Mal eine axiomatische Beschreibung von Doppelnebenklassen und Bahnenräumen von $[FIA]_B^-$ - Gruppen, denn die Axiome scheinen geradezu darauf zugeschnitten zu sein. Daß die Struktur der Hypergruppen aber weit über dieses Konzept hinaus verwendet werden kann, geht unter anderem aus der vorliegenden Arbeit hervor.

Ein Blick in die vielen, seit 1975 verfassten Arbeiten über Hypergruppen zeigt, daß sich Jewetts Axiomatik durchsetzte, nicht aber seine Terminologie: Jewett nennt seine Gebilde stets "convos", während Dunkl und Spector von "hypergroup(e)s" sprechen. Vermutlich wurde Jewetts System der Vorzug gegeben, weil er auf rund 100 Seiten beschreibt, was man mit mit seinen Hypergruppen (alias "convos") alles machen kann. So soll auch hier auf diese Definition zurückgegriffen werden; die Aussagen von diesem Kapitel A 2 stammen fast ausschließlich aus Jewetts Arbeit [J]:

A 2.1 Axiome

Ein nicht-leerer lokalkompakter Raum K zusammen mit einer bilinearen Operation $*: M(K) \times M(K) \longrightarrow M(K)$ heißt Hypergruppe, wenn die Axiome (H 1) bis (H 6) erfüllt sind:

(H 1) $(M(K), *)$ ist eine komplexe Algebra.

(H 2) Die Abbildung $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ ist positiv-stetig (vgl. [J], 2.4).

(H 3) Für $x, y \in K$ ist $p_x * p_y \in M^1(K)$ und $\mathrm{spt}(p_x * p_y)$ ist kompakt.

(H 4) Die Abbildung $(x,y) \mapsto \mathrm{spt}(p_x * p_y)$ ist stetig bezüglich der in [J], 2.5 angegebenen Topologie auf der Menge der kompakten Teilmengen von K.

(H 5) Es gibt ein $e \in K$, so daß $p_x * p_e = p_e * p_x = p_x \;\forall x \in K$.

(H 6) Es gibt eine Involution $x \mapsto x^-$ in K, so daß gilt $(e \in \mathrm{spt}(p_x * p_y) \Leftrightarrow x^- = y)$.

Falls $p_x * p_y = p_y * p_x \;\forall x,y \in K$ gilt, heißt die Hypergruppe kommutativ.

Obwohl eine Hypergruppe erst durch das Paar $(K, *)$ festgelegt ist, schreibt man oftmals nur K, sofern keine Zweifel bezüglich $*$ bestehen.

A 2.2 Beispiele

a) Sei G eine lokalkompakte Gruppe, auf der eine kompakte Gruppe B stetig wirkt. Dann ist (G,B), die Menge der B-Bahnen in G, mit geeignetem $*$ eine Hypergruppe (siehe [J], 8.3A).
Zu einer Klasse von Funktionen F(G) auf G bezeichne F(G,B) die Menge derjenigen Funktionen in F(G), die konstant sind auf B-Bahnen. Sie können in natürlicher Weise mit den Funktionen auf K = (G,B) identifiziert werden.
Insbesondere heißen die SO(n)-invarianten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ radiale Funktionen. (SO(n) := Menge der Isometrien in $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1)

b) Sei G eine lokalkompakte Gruppe und H eine kompakte Untergruppe von G. Dann ist die Menge der Doppelnebenklassen $G/\!/H := \{HxH : x \in G\}$ eine Hypergruppe. (Vgl. [J], 8.2B)

A 2.3 Funktionen auf Hypergruppen

Für eine Borel-Funktion f auf K ((K,$*$) eine Hypergruppe) und $x_1, \dots x_n \in K$ seien erklärt:

$\underline{f(x_1 * \ldots x_n)} := \int f \, d(p_{x_1} * \ldots p_{x_m})$

$\underline{{}_x f(y)} := \underline{f_y(x)} := f(x * y)$

$\underline{f^-(x)} := f(x^-)$ (Vgl. [J], 3.1 und 3.4)

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$f^-(x * y) = f(x^- * y^-)$ ([J], 3.4B)

$$f(x_1 * \ldots x_n * (y_1 * \ldots y_m)^- * z_1 * \ldots z_k) =$$
$$= f(x_1 * \ldots x_n * y_m^- * \ldots y_1^- * z_1 * \ldots z_k)$$

Neben den in A.1.3 definierten Funktionenklassen gibt es auf Hypergruppen noch die folgenden:

$\underline{UC_R(K)} := \{f \in CB(K)$: Die Abbildung $x \longmapsto f_x$ ist stetig bezüglich der $\| \|_\infty$-Topologie$\}$

$\underline{UC_L(K)} := \{f \in CB(K)$: Die Abbildung $x \longmapsto {}_x f$ ist stetig bezüglich der $\| \|_\infty$-Topologie$\}$

$\underline{UC(K)} := UC_R(K) \cap UC_L(K)$

(Diese Definitionen sind verträglich mit der gleichmäßigen Stetigkeit von Gruppen.)

A 2.4 Das Haarsche Maß

Ein nicht-triviales Maß $m \in M^\infty(K)$ heißt <u>links-invariant</u> (oder: <u>linkes Haarsches Maß</u>), kurz <u>l.i.</u> , falls für alle $x \in K$ $p_x * m$ definiert und $p_x * m = m$ ist. Man weiß, daß sich zwei l.i. Maße allenfalls durch eine multiplikative Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ unterscheiden ([J], 5.2) . Alle bekannten Beispiele von Hypergruppen besitzen ein l.i. Maß; es ist bewiesen, daß alle diskreten ([J], 7.1A), alle kompakten ([J], 7.2A), alle kommutativen ([Sp 2]), sowie alle nach A 2.2a ([J], 8.3A) und A 2.2b ([J], 8.2B) konstruierten Hypergruppen ein l.i. Maß besitzen. Der allgemeine Existenzbeweis ist noch nicht geglückt, doch wollen wir von den in dieser Arbeit vorkommenden Hypergruppen stets annehmen, daß sie ein l.i. Maß besitzen.

Für den Rest von A2 bezeichne nun m stets ein l.i. Maß. Dann gilt die nützliche Identität:

$$\int_K f(x*y) \, g(y) \, dm(y) = \int_K f(y) \, g(x^- * y) \, dm(y) ,$$

wobei f und g Borel-Funktionen sind, von denen mindestens eine σ-endlich bezüglich m ist (vgl. [J], 5.1D). Für eine Teilmenge A von K sei $\underline{A^-} := \{x \in K : x^- \in A\}$ und für ein Borel-Maß μ auf K $\underline{\mu^-}(A) := \mu(A^-)$. Dann sieht man leicht, daß m^- rechts-invariant (r.i.) ist. Die modulare Funktion Δ ist definiert durch
$\Delta(x) = m * p_{x^-}$ (vgl. [J], 5.3).

Es gelten die Identitäten:

$$\Delta\Delta^- = 1, \quad m = \Delta m^- \quad ([J],\ 5.3B),$$
$$(\Rightarrow m^- = \Delta^- m; \quad \Delta(x^-) = (\Delta(x))^{-1}),$$
$$\Delta(x*y) = \Delta(x)\Delta(y) \quad \text{für } x,y \in K \quad ([J],\ 5.3C).$$

Anstelle von dm(x) oder $dm^-(x)$ schreibt man häufig kürzer $\underline{dx}$ oder $\underline{d^-x}$, sofern ein Konflikt mit der in A.1.4 getroffenen Vereinbarung ausgeschlossen ist.

A 2.5 Fouriertransformationen

Für eine Hypergruppe mit l.i. Maß sei stets

$\underline{L^p(K)} := L^p(K,m), \qquad p \in (0, \infty]$,

$\underline{P(K)} := P(K,m)$

Für f und g wie in A 2.4 ist die Faltung wie folgt definiert:

$$(f*g)(x) := \int_K f(x*y)\,g(y^-)\,dm(y) = \int_K f(y)g(y^-*x)dm(y)$$
$$= \int_K f(y^-)g(y*x)\,dm^-(y) = \int_K f(x*y^-)g(y)dm^-(y)$$

([J], 5.5).

Das Trippel $(L^1(K), *, \|\ \|_1)$ ist eine Banach-Algebra ([J], 6.2G).

Einige weitere Funktionenklassen; es bezeichne

$\underline{\mathcal{X}(K)} := \{\chi \in C(K) : \chi(x*y) = \chi(x)\cdot\chi(y) \ \ \forall x,y \in K; \ \ \chi \neq 0\}$,
die Menge der multiplikativen Funktionen auf K, und

$\underline{\mathcal{X}_b(K)} := \mathcal{X}(K) \cap CB(K)$ (vgl. [J], 6.3).

$\mathcal{X}_b(K)$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, ist ein lokalkompakter Hausdorff-Raum (vgl. [J], 6.3H).

Falls K kommutativ ist, sei

$\hat{K} := \{\chi \in \mathcal{X}_b(K) : \chi(x^-) = \overline{\chi(x)} \quad \forall x \in K\}$ das Dual von K.

Die Elemente von $\hat{K}$ heißen Charaktere.

Für $f \in L^1(K)$ und $\chi \in \hat{K}$ definiere man

$\hat{f}(\chi) := \int f \overline{\chi}\, dm$, $A(\hat{K}) := \{\hat{f} : f \in L^1(K)\}$ und $\|\hat{f}\|_{A(\hat{K})} = \|f\|_1$

$\hat{f}$ heißt die Fouriertransformierte von f. Die folgende Identität läßt sich direkt nachrechnen:

$\widehat{f * g}\,(\chi) = \hat{f}(\chi) \cdot \hat{g}(\chi)$.

A 2.6 Starke Hypergruppen

Falls K kommutativ ist, gibt es unter gewissen Umständen für alle $\chi, \psi \in \hat{K}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(\chi,\psi)$ mit kompaktem Träger auf $\hat{K}$, so daß $(\chi \cdot \psi)(x) =$
$= \int \rho(x)\, d\mu(\chi,\psi)(\rho) \quad \forall x \in K$ (vgl. [J], 12.3). In diesem Fall ist $(\hat{K}, *)$ wieder eine Hypergruppe, wobei $*$ durch $p_\chi * p_\psi = \mu(\chi,\psi)$ erklärt ist. Wenn nun darüber hinaus auch noch $\hat{\hat{K}}$ eine Hypergruppe ist, so ist $\hat{\hat{K}} \cong K$ (siehe [J], 12.4). Falls dies erfüllt ist, heiße K eine starke Hypergruppe. Klar, daß in einem solchen Fall auch $\hat{K}$ eine starke Hypergruppe ist.

Für starke Hypergruppen gelten alle wichtigen Sätze, die aus der harmonischen Analyse für lokalkompakte abelsche Gruppen bekannt sind. (Einige dieser Sätze gelten auch schon unter schwächeren Voraussetzungen.) Hier sei eine Zusammenstellung davon:

Zum Haarschen Maß m auf K gibt es ein eindeutig bestimmtes, nicht-negatives Maß π auf $\hat{K}$ (das zu m gehörige, sogenannte Plancherel-Maß), so daß

$$\int_K |f|^2\, dm = \int_{\hat{K}} |\hat{f}|^2\, d\pi \qquad \forall f \in L^1(K) \cap L^2(K) \qquad ([J], 7.3I).$$

Die Fouriertransformation läßt sich zu einer Isometrie von $L^2(K)$ auf $L^2(\hat{K})$ fortsetzen. Das Maß π ist ein Haarsches Maß für die Hypergruppe $\hat{K}$.

Falls $f \in C(K) \cap L^1(K)$ und $\hat{f} \in L^1(\hat{K})$ ist, gilt die

Umkehrformel: $\qquad f(x) = \int_{\hat{K}} \chi(x)\, \hat{f}(\chi)\, d\pi(\chi) \qquad$ ([J],12.2C).

A 3 Jacobi-Polynome

Da die Jacobi-Polynomsequenzen durch zwei unabhängige reelle Parameter klassifiziert werden, decken sie eine große Klasse von orthogonalen Polynomen ab. Darunter fallen als Spezialfälle auch die ultrasphärischen Polynome und die Legendre-Polynome. Für weitergehende Informationen halte man sich zum Beispiel an Szegös Buch über orthogonale Polynome ([Sz]).

A 3.1 Definition

a) Eine Folge von Polynomen (P_n) heißt Polynomsequenz, falls grad $P_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zu $\alpha > -1$, $\beta > -1$ gibt es genau eine Polynomsequenz $(P_n^{(\alpha,\beta)})$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_k(x)\, (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}\, dx = \delta_{n,k} .$$

Die $P_n^{(\alpha,\beta)}$ heißen Jacobi-Polynome.

c) Die $P_n^{(\alpha,\alpha)}$ heißen ultrasphärische Polynome.

d) Die $P_n^{(0,0)}$ heißen Legendre-Polynome.

A 3.2 Einige Eigenschaften

a) Das Jacobi-Polynom $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ist die einzige Polynomlösung der folgenden Differentialgleichung:

$$(1-x^2)\, y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\, x)\, y' + n(n+\alpha+\beta+1)\, y = 0$$

([Sz], Theorem 4.2.1 und 4.2.2)

b) Die $P_n^{(\alpha,\beta)}$ sind eindeutig bestimmt durch die Rodriguez-Formel:

$$(1-x)^{\alpha}\, (1+x)^{\beta}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}\right)$$

([Sz], 4.3.1)

c) Eine explizite Formel:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \prod_{\lambda=1}^{\nu} (n+\alpha+\beta+\lambda) \cdot \prod_{\mu=\nu+1}^{n} (\alpha+\mu) \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu}$$

A 3.3 Die Polynome R_n

Für die harmonische Analyse eignen sich die bei $x = 1$ normierten Jacobi-Polynome $R_n^{(\alpha,\beta)} := P_n^{(\alpha,\beta)}/P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ in der Regel besser als die $P_n^{(\alpha,\beta)}$.
Es gilt: $|R_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leq 1$ für $x \in [-1,1]$ und $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ ([CM], (1.4)).

A 4 Bessel-Funktionen

Sie gehören sicherlich zu den bedeutensten und meistverwendeten Klassen von speziellen Funktionen. Sogar ihr historischer Werdegang ist bemerkenswert: Watson ([W]) verfolgt ihn zurück bis ins 17. Jahrhundert (James Bernoulli). Das 800 Seiten umfassende Werk über Bessel-Funktionen von Watson aus dem Jahre 1922 kann auch heute noch nicht als überholt angesehen werden. Dennoch findet man viele Informationen über Bessel-Funktionen bequemer in anderen Quellen, z.B. in [EMOT].

A 4.1 Definition

Die Bessel-Funktionen erster Art, oder kurz Bessel-Funktionen $J_\nu(z)$ sind definiert durch die konvergente Reihe

$$J_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m!\,\Gamma(m+\nu+1))^{-1} (z/2)^{2m}$$

$(\nu,\ z \in \mathbb{C})$ ([EMOT], 7.2.1(2)).

A 4.2 Eigenschaften

a) J_ν genügt der Differentialgleichung

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$$ ([EMOT], 7.2.1(1));

b) $z^{-\nu} J_\nu(z)$ ist eine ganze Funktion ;

c) $J_\nu(x) = O(x^{-1/2})$ und diese Abschätzung ist bestmöglich.

([EMOT], 7.13.1(3))