5. Mittelbarkeit

Wenn auf gewissen Funktionenklassen einer Gruppe translationsinvariante, nicht-triviale Funktionale definiert werden können, so nennt man diese Gruppe mittelbar. Greenleaf hat in [Gr] die wichtigsten Resultate, die in Zusammenhang mit der Mittelbarkeit von topologischen Gruppen stehen, zusammengestellt.

Der Begriff der Mittelbarkeit von Banach-Algebren wird in [BD] in einem kohomologischen Rahmen definiert, und es wird dort gezeigt, daß G mittelbar ist, genau dann, wenn $\ell^1(G)$ $(=L^1(G^d)$, wobei G^d die diskrete Version von G ist) mittelbar ist. Diese Betrachtungen gehen auf Johnson zurück, der in [Jo], 2.5 auch die Äquivalenz der Mittelbarkeit von G und $L^1(G)$ zeigt. Es wird sich herausstellen, daß diese Äquivalenz für Hypergruppen nicht gilt, so daß wir zwischen zwei Mittelbarkeiten, nämlich der schwachen und der starken unterscheiden müssen.

Dieser Abschnitt 5 ist der Frage gewidmet, welche Aussagen bezüglich der Mittelbarkeit sich vom Gruppen- auf den Hypergruppenfall übertragen lassen; dabei wird wie immer angenommen, daß die Hypergruppe ein links-invariantes Maß besitzt. Zuletzt werden dann die inzwischen wohlbekannten Klassen von Hypergruppen, welche von Jacobi-Polynomen bzw. Bessel-Funktionen herrüren, untersucht.

5.1 Schwache Mittelbarkeit von Hypergruppen

Es sei K eine Hypergruppe und F(K) ein Vektorraum von komplex-wertigen, beschränkten Funktionen auf K, der die konstanten Funktionen enthält und abgeschlossen ist bezüglich komplexer Konjugation. Dann gelte die

5.1.1 Definition

a) Ein lineares Funktional m auf F(K) heißt <u>links-invariantes Mittel</u> (<u>LIM</u>) auf F(K), wenn

(i) $m(\overline{f}) = \overline{m(f)}$ $\forall f \in F(K)$

(ii) $m(f) \geq 0$ falls $f \geq 0$

(iii) $m(\mathbb{1}) = 1$

(iv) $m({}_xf) = m(f)$ $\forall f \in F(K),\ x \in K$

b) Falls für alle $f \in F(K)$ eine Faltung mit Elementen aus $L^1(K)$ definiert ist, dann heißt ein lineares Funktional m auf $F(K)$ ein <u>toplogisches links-invariantes Mittel</u> auf $F(K)$, wenn (i) - (iii) gelten und zusätzlich

(v) $m(g*f) = m(f) \quad \forall f \in F(K),\ g \in P(K)$ (Vgl. A 1.4 und A 2.5).

<u>5.1.2 Bemerkung</u>

Bedingung (ii) und (iii) stellen sicher, daß ein LIM stetig ist bezüglich der $\| \|_\infty$-Norm.

<u>5.1.3 Lemma</u>

Seien $g, g' \in P(K)$, $f \in L^\infty(K)$; dann ist

a) $g * f \in UC_L(K)$

b) $f * g \in UC_R(K)$

c) $g * f * g \in UC(K)$ (Vgl. A 2.3).

Beweis:

a) Für $x \in K$ ist

$$\begin{aligned}({}_x g*f)(y) &= \int g(x*z)\, f(z^- * y)\, dz \\ &= \int g(z)\, f((x^- * z)^- * y)\, dz \\ &= \int g(z)\, f(z^- * (x*y))\, dz \\ &= {}_x(g*f)(y) \quad .\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\| {}_x(g*f) - {}_{x'}(g*f)\|_\infty &= \\ = \| ({}_x g - {}_{x'} g) * f \|_\infty &\leq \\ \leq \| {}_x g - {}_{x'} g\|_1 \, \| f \|_\infty & \quad \text{für } x, x' \in K\end{aligned}$$

([J], 5.5E) .

Da aber die Abbildung $z \longmapsto {}_z g$ stetig ist in $L^1(K)$ ist damit auch $z \longmapsto {}_z(g*f)$ stetig in $L^\infty(K)$.

b), c) ganz analog. $\square$

<u>5.1.4 Proposition</u>

Für eine Hypergruppe K sind äquivalent:

(i) $\exists$ top. LIM auf $L^\infty(K)$

(ii) $\exists$ LIM auf $L^\infty(K)$

(iii) $\exists$ LIM auf $CB(K)$

(iv) $\exists$ LIM auf $UC_R(K)$

(v) $\exists$ LIM auf $UC_L(K)$

(vi) $\exists$ LIM auf $UC(K)$

(vii) $\exists$ top. LIM auf $UC(K)$

Beweis:

Die Implikationen $(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii}) \Rightarrow \begin{matrix}(\mathrm{iv})\\(\mathrm{v})\end{matrix} \Rightarrow (\mathrm{vi})$ sind klar, da jeder vorkommende Raum ein abgeschlossener Teilraum seines Vorgängers ist.

$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$: Sei $g \in P(K)$; $f \in L^\infty(K)$; $x,y \in K$ und m ein top. LIM auf $\underline{L^\infty(K)}$:

$$\begin{aligned}
(g * {}_x f)(y) &= \int g(z)\, {}_x f(z^- * y)\, dz \\
&= \int g(z)\, f(x * z^- * y)\, dz \\
&= \int g(z)\, f((z * x^-)^- * y)\, \Delta(z)\, d^- z \qquad \text{[J], 5.1D} \\
&= \int g(z * x)\, f(z^- * y)\, \Delta(z * x)\, d^- z \\
&= \int g_x(z)\, f(z^- * y)\, \Delta(x)\, dz \\
&= ((\Delta(x) \cdot g_x) * f)(y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \Delta(x)\, g_x(z) &= \int g(z * x)\, \Delta(x)\, \Delta(z)\, d^- z \\
&= \int g(z * x)\, \Delta(x * z)\, d^- z \\
&= \int g(z)\, \Delta(z)\, d^- z \\
&= \int g(z)\, dz = 1 \quad .
\end{aligned}$$

Also ist $\Delta(x) g_x \in P(K)$, und es gilt mit obiger Identität:

$$m({}_x f) = m(g * {}_x f) = m((\Delta(x) g_x) * f) = m(f) \; ;$$

folglich ist m ein LIM auf $L^\infty(K)$.

$(\mathrm{vi}) \Rightarrow (\mathrm{vii})$: Sei $g \in P(K)$; $f \in UC(K)$; $x,y \in K$ und m ein LIM auf $UC(K)$. Nach Lemma 5.1.3 ist dann $g * f \in UC(K)$, und wie im Beweis von 5.1.3 sieht man, daß ${}_x g * f = {}_x(g * f)$. Also gilt:

$$m({}_x g * f) = m({}_x(g * f)) = m(g * f) \; ;$$

somit ist die Abbildung $g \longrightarrow m(g * f)$ translationsinvariant und daher ein Vielfaches des Haarschen Maßes, d.h.

$$\exists\ k(f) \in \mathbb{C} \ni m(g*f) = k(f)\cdot\int g(t)\,dt$$
$$= k(f)\ , \quad \text{da} \quad g \in P(K).$$

Sei nun $(C_\lambda)_\lambda$ eine Umgebungsbasis von e in K und $(e_\lambda)_\lambda \subseteq P(K)$ eine approximierende Eins in $L^1(K)$ mit $spt(e_\lambda) \subseteq C_\lambda$

$$\Rightarrow \|e_\lambda * f - f\|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{da} \quad f \in UC(K).$$

Es gilt daher: $\quad k(f) = m(e_\lambda * f) \longrightarrow m(f)$

und andererseits: $\quad k(f) = m((g * e_\lambda) * f)$
$$= m(g * (e_\lambda * f)) \longrightarrow m(g * f).$$

Also ist $\quad m(f) = m(g * f)$.

(vii) $\Rightarrow$ (i): Sei $E = E^-$ eine symmetrische Umgebung von $e \in K$ und $\phi_E = \phi_E^- \in P(K)$ die zugehörige, normalisierte charakteristische Funktion.

Dann ist nach Lemma 5.1.3 $\quad \phi_E * f * \phi_E \in UC(K) \quad \forall f \in L^\infty(K)$.

Sei weiterhin m ein top. LIM auf $UC(K)$; dann definiere man
$$\tilde{m}(f) := m(\phi_E * f * \phi_E) \quad \text{für} \quad f \in L^\infty(K).$$

Es bleibt zu zeigen: $\tilde{m}$ ist topologisch links-invariant.

Seien dazu $h \in UC_R(K)$; $g_1, g_2, \phi \in P(K)$ und $\{e_\lambda\}_\lambda \subseteq P(K)$ eine approximierende Eins für $L^1(K)$.

$$\Rightarrow \|g_i * e_\lambda * h - g_i * h\|_\infty \xrightarrow{\lambda} 0 \quad \text{für } i = 1, 2$$
([J], 5.5E)

und daher gilt:

$$m(g_1 * h) \xleftarrow{\lambda} m(g_1 * e_\lambda * h) = m(g_2 * e_\lambda * h) \xrightarrow{\lambda} m(g_2 * h)$$

(Man beachte, daß $g_i * h$, $e * h \in UC(K)$ nach Lemma 5.1.3)

Setze nun $h := f * \phi_E$, $g_1 := \phi_E * \phi$, $g_2 := \phi_E$:

$$\tilde{m}(\phi * f) = m(\phi_E * \phi * f * \phi_E) = m(\phi_E * f * \phi_E) = \tilde{m}(f)\ . \square$$

<u>5.1.5 Definition</u>

Eine Hypergruppe K heißt <u>schwach mittelbar</u>, wenn sie eine der Bedingungen in 5.1.4 (und damit alle) erfüllt.
(Man müßte eigentlich von links-schwach mittelbar spre-

chen; der Verzicht auf das Wort "links" wird aber keine Verwirrung stiften.)

Kommutative Halbgruppen sind stets mittelbar; dies hat Dixmier in [D] gezeigt, indem er eine Bedingung (D) angibt, die äquivalent zur Mittelbarkeit ist, und nachweist, daß kommutative Halbgruppen (D) erfüllen. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für Hypergruppen; die Beweise für den Gruppenfall, wie sie etwa in [Gr], §1.2 zu finden sind, können wörtlich übernommen werden:

5.1.6 Proposition

Eine Hypergruppe K ist genau dann schwach mittelbar, wenn gilt:

(D) Falls $f_1, \dots f_N$ reellwertige Funktionen in $CB(K)$ sind und $\{x_1 \dots x_N\} \subseteq K$, dann ist

$$\inf_{y \in K} \left\{ \sum_{i=1}^{N} (f_i(y) - {}_{x_i}f_i(y) \right\} \leq 0$$

Beweis: Siehe [Gr], S 5 .□

5.1.7 Satz

Jede kommutative Hypergruppe ist schwach mittelbar.

Beweis: Siehe [Gr], Theorem 1.2.1.□

5.1.8 Satz

Für eine Hypergruppe sind äquivalent:

(i) K ist mittelbar

(ii) K erfüllt die Eigenschaft

$$P_1: \begin{cases} \forall\, C \subseteq K,\ C \text{ kompakt},\ \varepsilon > 0 \\ \exists \text{ ein } \tau \in P(K), \text{ so daß } \int |{}_x\tau - \tau| < \varepsilon \quad \forall x \in C \end{cases}$$

(iii) K erfüllt die Eigenschaft

$$P_*: \begin{cases} \forall \text{ endlichen Mengen } F \subseteq K,\ \varepsilon > 0,\quad \exists\, s \in L^1(K) \\ \text{mit } \|s\|_1 = 1,\ \int s \geq \rho > 0 \text{ und} \\ \int |{}_x s - s| < \varepsilon \quad \forall x \in F \end{cases}$$

(ρ ist unabhängig von F und ε.)

(iv) $I^1(K) := \left\{ f \in L^1(K) : \int f = 0 \right\}$ besitzt beschränkte approximierende Rechtseinsen.

Die hier angegebenen Kriterien für Mittelbarkeit sind im Gruppenfall als "Reiter's Bedingungen" bekannt. Die hier verwendeten Beweisideen stammen zum großen Teil aus [R1], Ch. 8, 3-6 und [R4], doch mußten die Techniken auf die Gegebenheiten von Hypergruppen hingetrimmt werden. Auch verwendet Reiter in [R4] eine -zumindest scheinbar- etwas schwächere Definition von approximierenden Rechtseinsen als wir. Dies macht im Beweis von "(ii)$\Rightarrow$(iv)" den Schritt δ) notwendig.

Für den Beweisteil "(i)$\Rightarrow$(ii)" findet man in Greenleafs Buch [Gr] einen wesentlich eleganteren und kürzeren Beweis als in Reiters Arbeiten. Dieser ist auch noch zu rund zwei Drittel absolut hypergruppentauglich, so daß ein Verweis genügt. Das verbleibende, rein technische Drittel konnte in dieser Arbeit gegenüber [Gr] noch geringfügig vereinfacht werden. Nun aber zum ...

Beweis:

Wir zeigen: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i) :

(i)$\Rightarrow$(ii): Wie in [Gr], 2.4.3 und 2.4.2 zeigt man zunächst, daß es in $P(K)$ ein "stark zur topologischen Links-Invarianz konvergierendes" Netz (ϕ_λ) gibt, d.h.

$$g * \phi_\lambda - \phi_\lambda \xrightarrow{\lambda} 0 \quad \text{in } L^1\text{-Norm für alle } g \in P(K)$$

Sei nun $C \subseteq K$ kompakt und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wähle ein beliebiges $\beta \in P(K)$.

$\Rightarrow$ Die Abbildung $x \longrightarrow {}_x\beta$ ist stetig in der L^1-Norm.

$\Rightarrow$ $\forall\, x \in C$ gibt es eine Umgebung U_x von x, so daß

$$\|{}_x\beta - {}_y\beta\|_1 < \varepsilon \qquad \forall\, y \in U_x .$$

Wähle $x_1 \dots x_n$ so, daß $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Nun gibt es ein λ, so daß

$$\|({}_{x_i}\beta) * \phi_\lambda - \phi_\lambda\|_1 < \varepsilon \quad \text{für } i=1, \dots n$$

und $\|\beta * \phi_\lambda - \phi_\lambda\|_1 < \varepsilon$.

Definiere $\phi := \beta * \phi_\lambda \in P(K)$.

Sei nun $y \in C$; Wähle i so, daß $y \in U_{x_i}$.

$$\Rightarrow \| {}_y\phi - \phi \|_1 = \| ({}_y\beta) * \phi_\lambda - \beta * \phi_\lambda \|_1$$
$$\le \| ({}_y\beta) * \phi_\lambda - ({}_{x_i}\beta) * \phi_\lambda \|_1 + \| ({}_{x_i}\beta) * \phi_\lambda - \beta * \phi_\lambda \|_1$$
$$\le \| {}_y\beta - {}_{x_i}\beta \|_1 \, \|\phi_\lambda\|_1 + \| ({}_{x_i}\beta) * \phi_\lambda - \phi_\lambda \|_1 + \| \beta * \phi_\lambda - \phi_\lambda \|_1$$
$$< 3\varepsilon$$

Also erfüllt K die Eigenschaft P_1.

(ii) $\Rightarrow$ (iv):

α) Seien $f \in L^1(K)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Wähle $C \subseteq K$, C kompakt, so daß $\int_{K \setminus C} |f| < \varepsilon/3$
und ein τ wie in (ii), passend zu C^- und $\varepsilon/(3\|f\|_1)$;

$$\|f * \tau\|_1 = \int_K \left| \int_K f(y)\, \tau(y^- * x)\, dy \right| dx$$
$$= \int_K \left| \int_K f(y)\, \tau(y^- * x) - f(y)\, \tau(x)\, dy \right| dx$$
$$\le \int_K \int_K |f(y)|\, |\tau(y^- * x) - \tau(x)|\, dy\, dx$$
$$= \int_K |f(y)|\, \| {}_{y^-}\tau - \tau \|_1\, dy$$
$$\le \int_C |f(y)|\, \| {}_{y^-}\tau - \tau \|_1\, dy + 2/3\,\varepsilon$$
$$\le \int_C |f(y)|\, \varepsilon/(3\|f\|_1)\, dy + 2/3\,\varepsilon \le \varepsilon$$

β) Man rechnet direkt nach, daß

$$\|f * \tau\|_1 = \int_K \left| \int_K f(x * \zeta^-)\, \Delta(\zeta^-)\, \tau(\zeta)\, d\zeta \right| dx$$

Das innere Integral wird nun durch eine Linearkombination anstelle von $\tau(\zeta)$ approximiert:

$$\left| \|f * \tau\|_1 - \int_K \left| \sum_{i=1}^n f(x * \zeta_i)\, \Delta(\zeta_i)\, c_i \right| dx \right| < \varepsilon$$

für geeignete $c_i \in \mathbb{C}$, $\zeta_i \in K$.

$$\Rightarrow 2\varepsilon > \left\| \sum_{i=1}^n c_i\, f_{\zeta_i}\, \Delta(\zeta_i) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i\, A_{\zeta_i}\, f \right\|_1 ,$$

wobei $A_\zeta f := \Delta(\zeta) f_\zeta$ für $\zeta \in K$.
(Man überprüft leicht, daß A_ζ eine L^1-Isometrie definiert.)

γ) Für f wie in α) wähle man nun ein $u \in P(K)$, so daß $\|f * u - f\|_1 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \Big\|\sum_{i=1}^{n} c_i A_{\zeta_i}(f * u)\Big\|_1 \leq 3\varepsilon ,$$ wie man leicht nachrechnet.

Setze $\nu := u - \sum_{i=1}^{n} c_i A_{\zeta_i} u$

$$\Rightarrow f * \nu - f = f * u - f - \sum_{i=1}^{n} c_i A_{\zeta_i}(f * u)$$

(Es ist $f * (A_{\zeta_i} u) = A_{\zeta_i}(f * u)$.)

Also ist $\|f * \nu - f\|_1 < 4\varepsilon$, $\int \nu = 0$

und $\|\nu\|_1 \leq \|u\|_1 + \sum_{i=1}^{n} c_i \|A_{\zeta_i} u\|_1 \leq 2$.

δ) In α) bis γ) wurde gezeigt: Zu beliebigem $f \in I^1(K)$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\nu \in I^1(K)$ mit

$\|f * \nu - f\|_1 < \varepsilon$ und $\|\nu\|_1 < 2$.

Mit [BD], Ch. I. Prop 2 folgt daraus die Existenz beschränkter approximierender Rechtseinsen in unserem Sinn.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Seien $a_1, \ldots a_N \in K$ und $\varepsilon > 0$. Man wähle ein beliebiges $f \in P(K)$ und definiere $f_n := {}_{a_n}f - f$. Dann ist $f_n \in I^1(K)$ und nach Voraussetzung gibt es ein $\nu \in I^1(K)$, so daß

$$\|f_n * \nu - f_n\|_1 < \varepsilon , \quad 1 \leq n \leq N.$$

Setze $g := f - f * \nu$

$$\Rightarrow {}_{a_n}g - g = ({}_{a_n}f - f) - ({}_{a_n}f - f) * \nu = f_n - f_n * \nu$$

Also ist $\|{}_{a_n}g - g\|_1 < \varepsilon$ für $1 \leq n \leq N$,

$1 \leq \|g\|_1 \leq 1 + M$ (wobei M die obere Schranke der approximierenden Einsen ν ist) und $\int g = 1$.

Man sieht, daß $s := g / \|g\|_1$ die gewünschten Bedingungen mit $\varrho = 1 + M$ erfüllt.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Das Netz Λ sei definiert durch

$\Lambda := (F,\varepsilon)$: F endliche Teilmenge von K, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,
geordnet nach der Vorschrift

$(F',\varepsilon') > (F,\varepsilon) \Leftrightarrow F' \supseteq F$ und $\varepsilon' < \varepsilon$.

Für $\lambda \in \Lambda$ wähle man s_λ wie in (iii), so daß

$\int |{}_a s_\lambda - s_\lambda| < \varepsilon$ für alle $a \in F$, (wobei $\lambda = (F,\varepsilon)$)

Also ist (s_λ) ein Netz in der Einheitskugel von $(L^\infty(K))^*$; nach dem Satz von Banach-Alaoglu gibt es ein schwach-*-konvergentes Teilnetz, ohne Einschränkung (s_λ) selbst.

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{N} \in (L^\infty(K))^*$, so daß $\mathcal{N}$ der schwach-* Grenzwert von (s_λ) ist, d.h.

$$\mathcal{N}(\phi) = \lim_\lambda \int s_\lambda \phi \quad \text{für alle} \quad \phi \in L^\infty(K) .$$

Sei nun $\phi \in L^\infty(K)$, $\varepsilon > 0$ und $x \in K$ beliebig. Dann rechnet man ohne Probleme nach, daß für $\lambda > (\{x\},\varepsilon)$

$$\int s_\lambda \cdot {}_x\phi = \int {}_{x^-}s_\lambda \cdot \phi \quad \text{und damit}$$

$$\left| \int s_\lambda \, {}_x\phi - \int s_\lambda \, \phi \right| < \varepsilon \quad .$$

Das bedeutet, daß $\lim_\lambda \int (s_\lambda \cdot \phi - s_\lambda \cdot {}_x\phi) = 0$

bzw. $\mathcal{N}({}_x\phi) = \mathcal{N}(\phi)$ für alle $\phi \in L^\infty(K)$ und $x \in K$.

Das Funktional $\mathcal{N}$ ist also translations-invariant, aber nicht notwendigerweise positiv.

Sei $L^\infty_+(K) := \{ f \in L^\infty(K) : f \geq 0 \}$; für $\psi \in L^\infty_+(K)$ definiere man $\mathcal{M}'(\psi) := \sup \{ \operatorname{Re} \mathcal{N}(\varphi) : \varphi \in L^\infty(K), |\varphi| \leq \psi \}$

Dann ist $\mathcal{M}'$ positiv homogen, additiv und links-invariant auf $L^\infty_+(K)$. Weiterhin ist $\mathcal{M}'(\mathbb{1}) \geq \delta$, da $\mathcal{N}(\mathbb{1}) \geq \delta$.

Also ist $\mathcal{M} := \mathcal{M}'/\mathcal{M}'(\mathbb{1})$, erweitert auf ganz $L^\infty(K)$, das gesuchte links-invariante Mittel auf $L^\infty(K)$.

5.2 Starke Mittelbarkeit von Hypergruppen

Dieser Begriff bezieht sich auf die Mittelbarkeit der zugehörigen L^1-Algebren. Dazu definiere man wie in [BD], §43 bzw. [Jo], §5:

5.2.1 Definition

Sei A eine Banach-Algebra und X ein Banach-A-Bimodul im Sinne von [BD] §9.11 und 9.12. Eine beschränkte lineare Abbildung $D: A \longrightarrow X$ heißt X-Derivation (von A), falls $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b \quad \forall a,b \in A$.
Weiterhin sei

$Z^1(A,X) := \{ D: A \to X \ : \ D \text{ ist eine Derivation von } A \}$

Für $x \in X$ sei $\delta_x: A \longrightarrow X$ definiert durch $\delta_x(a) = ax - xa$. Ein solches δ_x wird innere Derivation genannt, und

$B^1(A,X) := \{ \delta_x : x \in X \}$; Schließlich sei

$H^1(A,X) := Z^1(A,X) / B^1(A,X)$.

(Diese Bezeichnungsweise rührt von umfassenderen kohomologischen Betrachtungsweisen her, wie sie Johnson in [Jo] für Banach-Algebren anstellt.)

5.2.2 Definition

a) Eine Banach-Algebra A heißt mittelbar, wenn $H^1(A,X^*) = 0$ ist für alle Banach-A-Bimoduln X. (Zur Modulstruktur von X^* siehe [BD], Ex 9.13 oder [Jo], 1.)

b) Eine Hypergruppe K heißt stark mittelbar, wenn $L^1(K)$ mittelbar ist.

Für eine lokalkompakte topologische Gruppe sind die schwache und die starke Mittelbarkeit äquivalent. Nicht so für Hypergruppen, wo im allgemeinen nur eine Implikation gilt, wodurch die Terminologie gerechtfertigt wird:

<u>5.2.3 Satz</u>

Für eine Hypergruppe K gilt die Implikation:

$L^1(K)$ ist mittelbar (d.h. K ist stark mittelbar)

$\Rightarrow$ K ist schwach mittelbar .

Beweis:

Setze $A := L^1(K)$; dann ist $A^* \cong L^\infty(K)$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch

$$g^*(f) = \int_K g(x)\cdot f(x)\,dx \quad \text{für} \quad g \in L^\infty(K),\ f \in L^1(K).$$

Wir leiten nun eine Hilfsidentität her:

Sei dazu $a, f \in L^1(K)$, $g \in L^\infty(K)$

$$\begin{aligned}
(a*g)^*(f) &= \int (a*g)(x)\, f(x)\,dx \\
&= \int\int a(y)\, g(y^- * x)\, f(x)\,dx\,dy \\
&= \int a(y) \int g(x)\, f(y*x)\,dx\,dy \\
&= \int g(x) \int a(y)\, f(y*x)\,dy\,dx \\
&= \int g(x) \int a(y^-)\, f(y^- * x)\,\Delta(y^-)\,dy\,dx \qquad \text{[J], 5.3B} \\
&= \int g(x) \int ((a\cdot\Delta)^- * f)(x)\,dx \\
&= g^*((a\Delta)^- * f) \\
&= (g^*\cdot(a\Delta)^-)\,(f)
\end{aligned}$$

(In der letzten Umformung geht die Modulstruktur von X^* ein.)

Also gilt: (*) $\quad (a*g)^* = (g^*\cdot(a\Delta)^-)$

Es sei nun $\sigma \in A^*$ definiert durch $\sigma(f) = \int f(x)\,dx$ für $f \in L^1(K)$ (d.h. $\sigma = 1^*$). Man sieht leicht, daß $\sigma(f*g) = \sigma(f)\cdot\sigma(g)$, d.h. σ ist multiplikativ.

Aus [BD], §43 Prop 4 folgt daher, daß es ein $F \in A^{**}$ gibt mit $F(\sigma) = 1$ und $F(g^*\cdot a) = \sigma(a)\,F(g^*)$ für alle $a \in A$, $g^* \in A^*$.

Definiere $\mathcal{M} \in L^\infty(K)^*$ durch $\mathcal{M}(g) = F(g^*)$ für alle $g \in L^\infty(K)$. Für $\beta \in P(K)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\beta * g) = F((\beta * g)^*) &\overset{(*)}{=} F((g^*(\beta\cdot\Delta)^-)) \\
&= \sigma((\beta\,\Delta)^-)\,\mathcal{M}(g)
\end{aligned}$$

und $$\sigma(\beta\Delta^-) = \int \beta^-(x)\,\Delta^-(x)\,dx = \int \beta^-(x)\,d^-x = \int \beta(x)\,dx = 1 \quad ,$$

was die Links-Invarianz von $\mathcal{M}$ beweist.
Wie im Beweis von Satz 5.1.8 (Teil "(iii) $\Rightarrow$ (i)") gewinnt man daraus ein links-invariantes Mittel auf $L^\infty(K)$. □

5.2.4 Bemerkung

Die umgekehrte Implikation, nämlich "K schwach mittelbar $\Rightarrow$ $L^1(K)$ mittelbar" gilt nicht allgemein, wie man am Beispiel $K = (\mathbb{R}^3, SO(3))$ sehen kann: Als kommutative Hypergruppe ist K zwar schwach mittelbar, aber $L^1(K)$ ist nach [St], IV. 1 nicht mittelbar. Weitere Beispiele hierzu folgen in 5.4.

Es gilt die folgende interessante

5.2.5 Proposition

Sei K eine stark mittelbare Hypergruppe und $\alpha \in \mathcal{X}_b(K)$. Dann hat die Algebra $\left\{f \in L^1(K) : \int f(x)\,\alpha(x)\,dx = 0\right\}$ beschränkte approximierende Links- und Rechtseinsen.

Beweis: Siehe [St], II Korollar 7 und beachte, daß die Abbildung $f \longmapsto \int f(x)\,\alpha(x)\,dx$ ein Algebra-Homomorphismus ist. □

Es ergibt sich insgesamt das folgende Schema von Implikationen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\boxed{L^1(K)\text{ mittelbar}} \arrow[rr, Rightarrow, shift left] \arrow[dd, Rightarrow, shift left] & & \boxed{\begin{array}{c}\{f \in L^1(K) : \int f(x)\alpha(x)dx = 0\} \\ \text{hat appr. Einsen } \forall \alpha \in \mathcal{X}_b\end{array}} \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "?"'] \arrow[dd, Rightarrow, shift left] \\
 & \boxed{K\text{ kommutativ}} \arrow[ul, Rightarrow, "/" marking] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{K\text{ schwach mittelbar}} \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c}\{f \in L^1(K) : \int f(x)\,dx = 0\} \\ \text{hat appr. Einsen}\end{array}} \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

Erläuterung:

a) Alle "$\not\Longrightarrow$" können im Fall einer Gruppe durch "$\Longrightarrow$" ersetzt werden für Hypergruppen liefert $K * (\mathbb{R}^3, SO(3))$ jeweils ein Gegenbeispiel.

b) Die Implikation "$\overset{?}{\Longleftarrow}$" ist für Gruppen richtig, für Hypergruppen eine Vermutung.

5.3 Approximierende Diagonalen

Für eine Banach-Algebra A sei das projektive Tensorprodukt $A \otimes_p A$ (siehe [BD], § 42.11) als Banach-A-Bimodul definiert durch die Operationen

$$(a\otimes b)\cdot c = a\otimes bc, \qquad c\cdot(a\otimes b) = ca\otimes b \qquad \text{für } a,b,c \in A.$$

Dieser Modul ist also im allgemenen nicht kommutativ, selbst wenn A kommutativ ist. Wir benötigen die folgende

5.3.1 Definition

Ein beschränktes Netz (m_α) in $A \otimes_p A$ heißt approximierende Diagonale für A, wenn

(i) $\lim (m_\alpha a - a\, m_\alpha) = 0 \qquad \forall a \in A$

(ii) $\lim \pi(m_\alpha)\cdot a = a \qquad \forall a \in A$,

wobei $\pi: A \otimes_p A \longrightarrow A$ durch $(a\otimes b) = ab$ definiert ist.

Es gilt der wichtige

5.3.2 Satz

Eine Banach-Algebra ist mittelbar genau dann wenn sie eine approximierende Diagonale besitzt.

Beweis: [BD], § 43.8 und 43.9. $\square$

Wir werden uns von nun an ausschließlich mit dem Fall $A = L^1(K)$ für eine Hypergruppe K befassen. Hierfür gilt die

5.3.3 Proposition

Sei $f \in A = L^1(K)$, $\varphi \in L^1(K \times K)$; $x,y \in K$

a) $A \otimes_p A \cong L^1(K \times K)$ (isometrisch isomorph)

b) $$(f \cdot \varphi)(x,y) = \int f(x * z)\, \varphi(z^-,y)\, dz = \int f(z)\, \varphi(z^- * \check{x}, y)\, dz$$

$$(\varphi \cdot f)(x,y) = \int \varphi(x,y * z)\, f(z^-)\, dz$$

c) $$\pi(\varphi)(x) = \int \varphi(x * z, z^-)\, dz$$

Beweis:

a) Siehe [BD], § 42.14

b), c) Man kann annehmen, daß $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(K)$, da Funktionen dieser Art $L^1(K \times K)$ aufspannen. Also ist $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ (vgl [BD], § 42.14). Damit ergeben sich die Aussagen in a) und b) direkt aus der Definition der Modulstruktur bzw. von π. □

Die folgende Proposition soll ein Gefühl dafür geben, wie man approximierende Diagonalen für abelsche Gruppen konstruieren kann. Die Aussage könnte auf eine größere Klasse von Gruppen ausgedehnt werden, was aber etwas mehr technischen Aufwand bei der Beweisführung erfordern würde. Wie im Beweis von 5.1.8 definiere man dazu die geordnete Menge Λ, wobei lediglich die endlichen Mengen F durch kompakte ersetzt werden, sowie ein zugehöriges Netz $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq P(G)$.

5.3.4 Proposition

Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, $(s_\lambda) \subseteq P(G)$ wie oben gewählt und $(\psi_\lambda) \subseteq P(G)$ approximierende Einsen für $L^1(K)$. Dann ist $\varphi_\lambda(x,y) := \psi_\lambda(y \cdot x) \cdot s_\lambda(x)$ eine approximierende Diagonale in $L^1(G)$.

Beweis:

(i) Sei $a \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben; dann gibt es ein $C \subseteq K$, C kompakt, so daß $\int_{C^c} |a| < \varepsilon/2$;
wähle λ so, daß $\| s_\lambda - {}_z s_\lambda \|_1 < \varepsilon/(2\|a\|_1)$ $\forall z \in C$

$$\Rightarrow \|\varphi_\lambda a - a\varphi_\lambda\|_1$$

$$= \iint\left|\int \psi_\lambda(y\,z\,x)\, s_\lambda(x)\, a(z^{-1}) - a(z)\,\psi_\lambda(y\,z^{-1}x)\, s_\lambda(z^{-1}x)\, dz\right| dx\,dy$$

$$= \iint\left|\int \psi_\lambda(x\,y\,z)\,(s_\lambda(x) - s_\lambda(z\,x))\,a(z^{-1})\,dz\right| dx\,dy$$

$$\le \iiint_C \psi_\lambda(x\,y\,z)\,|s_\lambda(x) - {}_z s_\lambda(x)|\,|a(z^{-1})|\,dz + \int_{C^c}\psi_\lambda(x\,y\,z)\,|s_\lambda(x) - {}_z s_\lambda(x)|\,|a(z^{-1})|\,dz\,dx\,dy$$

$$\le \int_C \iint \psi_\lambda(y)\,dy\,|s_\lambda(x) - {}_z s_\lambda(x)|\,|a(z^{-1})|\,dx\,dz + \int_{C^c}\iint \psi_\lambda(y)\,dy\,|s_\lambda(x) - {}_z s_\lambda(x)|\,|a(z^{-1})|\,dx\,dz$$

$$\le \int_C 1\cdot \varepsilon/(2\|a\|_1)\,|a(z^{-1})|\,dz + \int_{C^c} 1\cdot 2\,|a(z^{-1})|\,dz$$

$$\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(ii) $$(\pi\varphi_\lambda)(x) = \int \varphi_\lambda(xz, z^{-1})\,dz$$

$$= \int \psi_\lambda(z^{-1}x\,z)\,s_\lambda(x\,z)\,dz$$

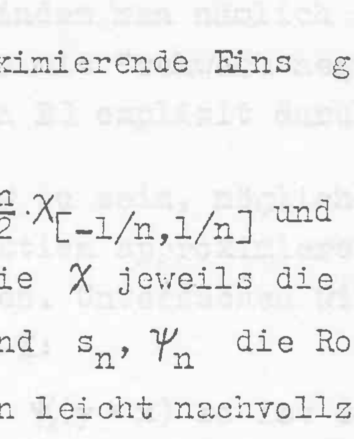
$$= \psi_\lambda(x)\int s_\lambda(z)\,dz$$

$$= \psi_\lambda(x)$$

und dies war als approximierende Eins gewählt. □

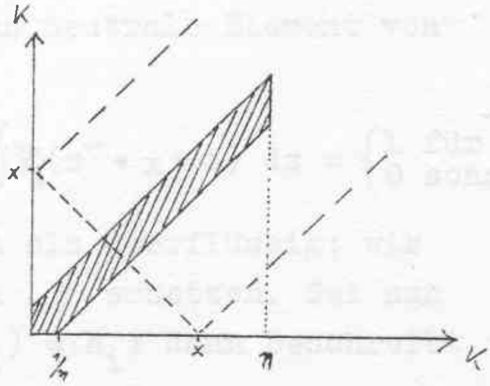
5.3.5 Beispiel

Für $G = (\mathbb{R},+)$ kann man $\psi_n = \frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}$ und $s_n = \frac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}$ wählen, wobei die χ jeweils die charakteristischen Funktionen sind und s_n, ψ_n die Rollen aus 4.3.4 übernehmen. Man kann dann leicht nachvollziehen, daß der Graph von φ_n wie ein Balken auf der Geraden $x+y=0$ im $\mathbb{R}^2$ liegt, wobei dieser Balken immer länger und schmäler wird, bis φ_n im Grenzfall nur noch für alle (x,y) mit $x+y=0$ von Null verschiedene Werte annimmt. Dies suggeriert geradezu den Ausdruck "approximierende Diagonale".



5.3.6 Beispiel

a) Die Hypergruppe $K = (\mathbb{R}, (\mathrm{id}, -\mathrm{id}))$ "entsteht" aus $\mathbb{R}$ durch Identifikation von x und $-x$. Dem Beispiel 5.3.5 folgend wäre es daher naheliegend, anzunehmen daß sich eine approximierende Diagonale φ_n als immer länger und dünner werdender Balken auf der Halbgeraden $x = y \geq 0$ vorstellen läßt, wie durch die schraffierte Fläche angedeutet. Dies entspräche auch dem Konstruktionsmuster von 4.3.4.



Eine Analyse von $\pi\varphi_n$ zeigt jedoch, daß sich $(\pi\varphi_n)(x)$ ergibt durch Integration entlang der gestrichelten Linie. Diese führt über schraffiertes Gebiet, so daß $(\pi\varphi_n)(x) \sim 1/n$ für $1/n < x < n$. $(\pi\varphi_n)$ ist damit keine approximierende Eins, das heißt diese naive Konstruktion versagt.

b) Man kann dennoch eine approximierende Diagonale für $K = (\mathbb{R}, (\mathrm{id}, -\mathrm{id}))$ finden, indem man nämlich die Bereiche außerhalb des Balkens mit "schwach negativen" Werten besetzt. Dies wird in B1 explizit durchgeführt.

Wesentlich schwieriger scheint es zu sein, möglichst allgemeine Vorschriften zur Konstruktion approximierender Diagonalen für Hypergruppen anzugeben. Untersuchen wir den Fall einer endlichen Hypergruppe K:

Wählt man $\varphi_\lambda(x,y)$ von der Form $\psi_\lambda(y * x)$ so ist die Bedingung (i) aus 5.3.1 automatisch erfüllt:

$$\begin{aligned} f \cdot \varphi_\lambda - \varphi_\lambda \cdot f &= \int f(z)\, \varphi_\alpha(z^- * x, y) - f(z^-)\, \varphi_\alpha(x, y * z)\, dz \\ &= \int f(z)\, (\varphi_\alpha(z^- * x, y) - \varphi_\alpha(x, y * z^-))dz \\ &= \int f(z)\, (\psi_\alpha(y * z^- * x) - \psi_\alpha(y * z^- * x))\, dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

für beliebige $f \in L^1(K)$. (Natürlich kann man in der Rechnung $\int$ durch $\sum$ und dz durch h(z) ersetzen.) Bei der zweiten Umformung wurde die Unimodularität einer diskreten Hypergruppe benutzt (siehe[J], 7.1A). Nun zur Bedingung (ii). Das Einselement in L (K) ist gegeben durch $\delta_e(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x=e \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$, wobei e das neutrale Element von K ist. Also muß gelten:

$$(\pi \varphi_\lambda)(x) = \int \varphi_\lambda(z, z^- * x)\, dz = \int \psi_\lambda(z^- * x * z)\, dz = \begin{cases} 1 \text{ für } x=e \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Eine Approximation erweiweist sich als überflüssig; wir können φ_λ durch φ und ψ_λ durch ψ ersetzen. Sei nun $K = \{x_1, \ldots x_n\}$ und setze $\psi(x_i) =: a_i$; dann beschreibt die obige Identität ein System von n Gleichungen für die n Unbekannten $a_1, \ldots a_n$. Falls c(i,j;k) die Strukturkoeffizienten der Hypergruppe sind, d.h.

$$p_{x_i} * p_{x_j} = \sum_{k=1}^{n} c(i,j;k)\, p_{x_k} \quad ,$$

dann lautet dieses Gleichungssystem explizit:

$$\begin{cases} c_{1,1}\, a_1 + c_{1,2}\, a_2 + \ldots + c_{1,n}\, a_n = 1 \\ c_{2,1}\, a_1 + c_{2,2}\, a_2 + \ldots + c_{2,n}\, a_n = 0 \\ \vdots \\ c_{n,1}\, a_1 + c_{n,2}\, a_2 + \ldots + c_{n,n}\, a_n = 0 \end{cases}$$

mit $c_{k,m} := \sum_{i,j} c(i^-,k;j)\, c(j,i;m)\, \frac{1}{c(i,i^-;1)}$.

(Hierbei sei vereinbart: $x_1 = e$ und $x_i^- = x_{i^-}$)

Man erhält dieses Gleichungssystem durch einfaches (aber mühsames) Einsetzen.

Es gilt also die

5.3.7 Proposition

Sei $K = \{x_1, \ldots x_n\}$ eine endliche Hypergruppe; dann erhält man eine approximierende Diagonale für $L^1(K)$, wenn man das obige lineare Gleichungssystem löst.

5.3.8 Beispiel

Im allgemeinen ist diese Methode (zumindest vom Rechenumfang her) sehr aufwendig. Daher sei sie hier nur für die zweielementige Hypergruppe $K = \{e, a\}$, deren Struktur durch $p_a * p_a = \beta p_e + (1-\beta) p_a$, $0 < \beta \leq 1$ vollständig gegeben ist (vgl. [J], 9.1B), demonstriert:

Sei $b_1 := \psi(e)$, $b_2 := \psi(a)$

$$\Rightarrow \psi(a*a) = \beta \cdot b_1 + (1-\beta)\cdot b_2$$

$$\text{und} \quad \psi(a*a*a) = \beta\cdot b_2 + (1-\beta)\cdot(\beta\cdot b_1 + (1-\beta)\cdot b_2)$$
$$= (\beta + (1-\beta)^2)\cdot b_2 + \beta(1-\beta)\, b_1$$

$$\int \psi(z^- * e * z)dz = b_1 + (\beta b_1 + (1-\beta) b_2)\frac{1}{\beta}$$
$$= 2 b_1 + (\tfrac{1}{\beta} - 1)\, b_2 \qquad = 1$$

$$\int \psi(z^- * a * z)dz = b_2 + ((\beta + (1-\beta)^2) b_2 + \beta(1-\beta) b_1)\frac{1}{\beta}$$
$$= (1-\beta)\, b_1 + (2 + \tfrac{1}{\beta}(1-\beta)^2)\, b_2 \qquad = 0$$

Die Lösung dieser letzten beiden Gleichungen ist

$$b_1 = \frac{1 + \beta^2}{(1+\beta)^2} \quad ; \quad b_2 = -\frac{(1-\beta)\beta}{(1+\beta)^2} \quad .$$

5.4 Starke Mittelbarkeit und spezielle Funktionen

Wir wollen zum Abschluß untersuchen, welche der in 2.2 und 2.3 eingeführten Hypergruppen stark mittelbar sind. (Schwach mittelbar sind sie alle, da sie kommutativ sind.) Das Resultat bleibt zwar unvollständig, beinhaltet aber dennoch neue Erkenntnisse.

Entgegen der bisher gepflogenen Reihenfolge wenden wir uns nun zunächst den von den Bessel-Funktionen induzierten Hypergruppen zu (vgl. 2.3). Hierzu gibt es ein Resultat von Stegmeir ([St], IV.), da besagt, daß die Hypergruppe $(\mathbb{R}^3, SO(3))$, -das entspricht in 2.3 dem Fall $\nu = 1/2$-, nicht stark mittelbar ist. Dieses Resultat läßt sich verallgemeinern:

5.4.1 Lemma

Wenn K_ν nicht stark mittelbar ist und $\mu \geq \nu$, dann ist auch K_μ nicht stark mittelbar.

Beweis: K_ν ist nicht stark mittelbar.
Also gibt es einen Banach-$L^1(K_\nu)$-Bimodul X und eine Derivation $D: L^1(K) \longrightarrow X^*$, die nicht eine innere Derivation ist.
Da nach [S 2], 3.1 die Inklusion $L(K_\mu) \hookrightarrow L(K_\nu)$ stetig ist, sind X und damit X^* auch $L(K_\mu)$-Bimoduln. Man überzeugt sich leicht, daß somit $D|_{L^1(K_\mu)}$ eine $L(K_\mu)$-Derivation ist. Wäre es eine innere $L(K_\mu)$-Derivation, so wäre auch D eine innere $L(K_\nu)$-Derivation, da $L(K_\mu)$ dicht liegt in $L(K_\nu)$. Letzteres ist aber nach Voraussetzung nicht der Fall; also ist nach Definition K_μ nicht stark mittelbar. □

Damit ist gezeigt, daß K_ν für $\nu \geq 1/2$ nicht stark mittelbar ist. Dieser Bereich kann noch etwas erweitert werden:

5.4.2 Satz

Die Hypergruppe K_0 ist nicht stark mittelbar.

Beweis: Wir nehmen an, K_0 sei stark mittelbar; daraus läßt sich einiges folgern:

(i) Zunächst sagt 5.2.5 aus, daß $I_\alpha(K_0) := \{f \in L(K_0) : \hat{f}(\alpha) = 0\}$ beschränkte approximierende Einsen hat für alle $\alpha \in \hat{K}_0$. Wir erinnern daran, daß $L^1(K_0) \cong$ $\cong L^1(\mathbb{R}^2, SO(2))$ und $I_\alpha(K_0) \cong I_\alpha(\mathbb{R}^2, SO(2)) :=$ $= \{f \in L^1(\mathbb{R}^2, SO(2)) : \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in [\alpha]\}$, wobei $[\alpha] := \{\gamma \in \widehat{\mathbb{R}^2} : \int_{SO(2)} \gamma \circ B \, dB = \alpha\}$. ($\alpha \in \hat{K}$ wird hier in natürlicher Weise als radiale Funktion auf $\mathbb{R}^2$ betrachtet.) Also besitzt $I_\alpha(\mathbb{R}^2, SO(2))$ approximierende Einsen, sagen wir (ψ_λ) (die von α abhängen), für alle $\alpha \in \hat{K}_0$.

(ii) Sei $I := (I_\alpha(\mathbb{R}^2, SO(2)) * L^1(\mathbb{R}^2))^{cl}$, wobei

$*$ die Faltung in $L^1(\mathbb{R}^2)$ bezeichnet. Dann ist I ein abgeschlossenes Ideal in $L^1(\mathbb{R}^2)$ mit approximierenden Einsen (ψ_λ). Weiterhin überzeugt man sich leicht davon, daß das Kospektrum von I die Menge $[\alpha]$ ist.

(iii) Ideale dieser Art werden in [R 2], §17, Theorem 2 behandelt. Dabei stellt sich heraus ([R 2], S 102), daß das Kospektrum von I von der Form $\bigcup_{n=1}^{N} \lambda_n \hat{E}_n$ ist. Hierbei sind die $\hat{E}_n$ Elemente der Boolschen Algebra, die von den (relativ) offenen Untergruppen der abgeschlossenen Untergruppen von $\widehat{\mathbb{R}^2}$ erzeugt wird, und $\lambda_n \in \widehat{\mathbb{R}}^2$. Geometrisch bedeutet dies, daß das Kospektrum eine endliche Vereinigeung von Geraden und Punkten des $\widehat{\mathbb{R}}^2$ $(\cong \mathbb{R}^2)$ ist. Andererseits ist diese Kospektrum aber gleich $[\alpha]$, und dies ist für $\alpha \neq 0$ ein nicht-trivialer Kreis um den Ursprung; ein Widerspruch! $\square$

<u>5.4.3 Korollar</u>

a) Für $\nu \geq 0$ ist die Hypergruppe K_ν nicht stark mittelbar.
b) $K_{-1/2}$ ist stark mittelbar. (Vgl. 2.3.6.)

Beweis: a) folgt aus 5.4.1 und 5.4.2.
b) Siehe 5.3.6. $\square$

Zuletzt wenden wir uns nochmals den Hypergruppen $K^{(\alpha,\beta)}$ zu (vgl. 2.2.1). Hier gilt die folgende

<u>5.4.4 Proposition</u>

a) Für $\alpha \geq 1/2$ ist $K^{(\alpha,\beta)}$ nicht stark mittelbar.
b) $K^{(-1/2,-1/2)}$ ist stark mittelbar.

Beweis:

a) Falls $\alpha \geq 1/2$ ist, sind die Fouriertransformierten von $L^1(K^{(\alpha,\beta)})$ differenzierbar, und die Ableitungen beschreiben stetige Funktionale. Daher ist die Methode von Stegmeir ([St], IV.1) anwendbar, die zeigt, daß $L^1(K^{(\alpha,\beta)})$ nicht mittelbar ist.

b) Da $R_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(\cos x) = \cos nx$ ist, gilt

$$R_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} \cdot R_m^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = 1/2\ (R_{n+m}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} + R_{|n-m|}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}).$$

Man sieht daraus, daß $K^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} \cong (\mathbb{Z}, (id,-id))$. In B 2 wird für diese Hypergruppe eine approximierende Diagonale gebaut.