4. Spektralsynthese

4.1 Allgemeines

Ein klassisches Problem in der harmonischen Analyse ist das der Spektralsynthese: Vorgegeben ist ein -in aller Regel lokalkompakter- topologischer Raum X und eine Banach-Algebra B von komplexwertigen Funktionen auf X mit punktweiser Multiplikation als Algebra-Operation. Man will nun zu einer abgeschlossenen Teilmenge A von X alle abgeschlossenen Ideale I in B charakterisieren, die gerade A als Kospektrum haben; dabei heißt $\underline{co(I)} := \{x \in X: f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$ das Kospektrum von I. Gibt es zu einer abgeschlossenen Menge A genau ein solches Ideal, dann heißt A Spektralmenge.

Es gilt der folgende nützliche

4.1.1 Satz

Sei K eine Hypergruppe und $\hat{K}$ sei der Strukturraum von $A(\hat{K})$, der Menge der Fourier-Transformierten. Ferner sei A eine abgeschlossene Teilmenge von $\hat{K}$. Dann ist

$$\underline{h(A)} := \{f \in A(\hat{K}) : f|_A \equiv 0\} \quad \text{das größte und}$$

$$\underline{j(A)} := \Big(\bigcup_{\substack{U \supseteq A \\ U \text{ offen}}} \{f \in A(\hat{K}) \cap C_{oo}(\hat{K}) : f|_U \equiv 0\}\Big)^{cl}$$

das kleinste abgeschlossene Ideal in $A(\hat{K})$ mit Kospektrum A.

Beweis:

Die einzige nicht-triviale Aussage ist, daß $j(A)$ das kleinste solche Ideal ist. Sei dazu I irgend ein abgeschlossenes Ideal mit Kospektrum A und $f \in A(\hat{K}) \cap C_{oo}(\hat{K})$ und $f|_U \equiv 0$ für ein offenes $U \supseteq A$.
Dann ist $(f^{-1}(0))^{int} \cup (co(I))^c = \hat{K}$ und f gehört laut [HR], 39.22 lokal auf ganz $\hat{K} \cup \{\infty\}$ zu I. Mit [HR], 39.21 ist damit $f \in I$. Da I abgeschlossen ist, gilt somit $j(A) \subseteq I$. □

4.1.2 Bemerkung

Im Gegensatz zum Gruppenfall ist $\hat{K}$ nicht immer der Strukturraum von $A(\hat{K})$. (Siehe dazu [J], 6.3F und 7.3)

In [CR], 3.8 findet man die folgende interessante

4.1.3 Proposition

Sei K eine starke Hypergruppe; dann sind Punkte im Zentrum von $\hat{K}$ Spektralmengen, wobei das Zentrum die Menge aller Punkte $x \in \hat{K}$ ist, für die $p_x * p_{x^-} = p_e$.

In den beiden folgenden Kapiteln wird auf den in 3.2 und 3.3 eingeführten Banach-Algebren $A(\hat{K})$ (mit $K = K_\nu$ bzw. $K = K^{(\alpha,\beta)}$) Spektralsynthese betrieben. Dabei können für einpunktige Mengen sowie für abgeschlossene Intervalle jeweils alle abgeschlossenen Ideale in $A(\hat{K})$ angegeben werden, die diese als Kospektrum haben. Partielle Resultate dazu liegen in [CM], [S 2] und [V] vor, die jedoch hier wesentlich erweitert werden. Kapitel 4.3 beinhaltet insbesondere die Ergebnisse von Schwartz ([Sc]) und Herz ([H]) zur Spektralsynthese auf der S^3 bzw. S^2 als Spezialfall.

Anzumerken wäre noch, daß die Methoden in 4.2 und 4.3 annähernd identisch sind, obwohl zwei anscheinend völlig verschiedene Hypergruppen zugrunde liegen.

4.2 Jacobi-Polynome

Cazzaniga und Meaney haben in ihrer gemeinsamen Arbeit [CM] die Algebra $A(\hat{K}^{(\alpha,\beta)})$ (Ihre Bezeichnung hierfür ist $AJ(\alpha,\beta,0)$.) von absolut konvergenten Reihen von Jacobi-Polynomen eingehend untersucht. Sie fanden dabei insbesondere heraus, daß innere Punkte von $[-1,1]$ keine Spektralmengen sind, falls $\alpha \geq 1/2$ ist. Für $\alpha = -1/2$ kann man relativ leicht einsehen, daß innere Punkte Spektralmengen sind. Für die verbleibende Lücke, $-1/2 < \alpha < 1/2$ wird in diesem Kapitel 3.2 eine Antwort gegeben. Um es vorweg zu nehmen: Innere Punkte sind in diesem Fall Spektralmengen. Darüber hinaus werden für beliebige $\alpha \geq -1/2$ alle Ideale mit einpunktigem Kospektrum charakterisiert.

Dazu wird zunächst hergeleitet, wie auf $A(\hat{K}^{(\alpha,\beta)})$ (Def. wie in 2.2.1) die stetigen Funktionale mit einpunktigem Träger beschrieben werden können (nämlich durch Ableitungen). Sodann wird gezeigt, daß sich die abgeschlossenen Ideale von $A(\hat{K}^{(\alpha,\beta)})$, deren Kospektrum Intervalle oder Punkte sind, mittels solcher Ideale beschreiben lassen.

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, dann bezeichnen in diesem Kapitel α und β reelle Zahlen mit $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ und <u>I</u> sei stets ein abgeschlossenes Ideal von $AJ(\alpha,\beta)$.

Dazu die folgende

<u>4.2.1 Definition</u>

In Anlehnung an [CM] definiere man

a) $\underline{AJ(\alpha,\beta)} := \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n^{(\alpha,\beta)} \; ; \; \|f\|_{(\alpha,\beta)} < \infty \right\}$

$$\text{wobei} \quad \underline{\|f\|_{(\alpha,\beta)}} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad ;$$

b) $\underline{S} := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{C} : \exists F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ mit } F|_{[-1,1]} = f \right\}$;

die Topologie auf S ist gegeben durch die folgende Umgebungsbasis der 0:

$$U_n := \left\{ f \in S : \left| f^{(i)}(x) \right| < 1/n \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots n; \; x \in [-1,1] \right\} .$$

<u>4.2.2 Bemerkung</u>

Mit den Bezeichnungen von Kapitel 2.2 ist $AJ(\alpha,\beta) = A(\hat{K}^{(\alpha,\beta)})$ und $\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \|f\|_{A(\hat{K}^{(\alpha,\beta)})}$.

(mit den Bezeichnungen in [CM] ist $AJ(\alpha,\beta) = AJ(\alpha,\beta,0)$.)

<u>4.2.3 Satz</u>

Die Inklusion $i: S \hookrightarrow AJ(\alpha,\beta)$ ist stetig.

Beweis:

(i) Nach [CM], 2.8 ist $S \subseteq AJ(\alpha,\beta)$. (Es sei jedoch bemerkt daß die in [CM] gegebene Definition von S etwas umfassender ist als die hier verwendete.) Also ist i eine wohldefinierte Inklusion.

Nun zum Beweis der Stetigkeit:

(ii) Sei F zunächst eine beliebige Funktion aus S und

$$f(\vartheta) = F(\cos\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n^{(-1/2,-1/2)}(\cos\vartheta) \quad \text{für } 0 \leq \vartheta \leq 2\pi .$$

Dann ist nach [CM], S. 394 unten

$$(*) \quad \|F\|_{(\alpha,\beta)} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (n+1)^{\alpha+1} \quad ,$$

wobei C eine Konstante ist, die nur von α und β, nicht aber von F oder den a_n abhängen kann.

Da $R_n^{(-1/2,-1/2)}(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$ (Vgl. [Sz], 4.1), ist

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0} a_n \cos n\vartheta \quad \text{und daher}$$

$$|a_n| \leq \left|\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta\right| .$$

Letzteres läßt sich durch wiederholte partielle Integration umformen, und man erhält schließlich die Ungleichung

$$(**) \quad |a_n| \leq 2n^{-k} \cdot \sup\left\{\left|f^{(k)}(\vartheta)\right| : \vartheta \in [0,2\pi]\right\}$$

für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \neq 0$.

Andererseits kann man durch wiederholtes Ableiten von $f = F \circ \cos$ nach der Kettenregel herausfinden, daß für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ und $\delta > 0$ eine Nullumgebung $U(k,\delta)$ in S existiert, so daß die folgende Implikation gilt:

$$F \in U(k,\vartheta) \Rightarrow |f^{(i)}(\vartheta)| < \delta \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots k \text{ und } \vartheta \in [0, 2\pi].$$

(iii) Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und α, β wie im Satz.

$$F \in U([\alpha+4], \tfrac{\varepsilon}{2C} \cdot 2^{-(\alpha+1)}) ;$$

dann gilt nach (**): $|a_n| \leq (\varepsilon \cdot 2^{-(\alpha+1)}) / (C \cdot n^{\alpha+3})$ für $n \geq 1$ und $|a_0| \leq (\varepsilon/C)\, 2^{-(\alpha+1)}$.

Dies in (*) eingesetzt ergibt schließlich, daß

$$\|F\|_{(\alpha,\beta)} < 3\varepsilon .$$

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung i bei 0 stetig ist; aus der Linearität folgt die globale Stetigkeit. □

4.2.4 Korollar

Ein Funktional $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ ist eindeutig bestimmt durch seine Einschränkung auf S. Diese ist seinerseits ein Funktional auf S.

Beweis:

Der zweite Teil der Aussage ist eine unmittelbare Folferung von 4.2.3.
Alle endlichen Linearkombinationen der $R_n^{(\alpha,\beta)}$ liegen offensichtlich in S, und daher liegt S dicht in $AJ(\alpha,\beta)$; dies beweist den ersten Teil der Aussage. □

Das Ziel dieser Untersuchungen ist, die abgeschlossenen Ideale in $AJ(\alpha,\beta)$ mit vorgegebenem Kospektrum zu klassifizieren. Hierbei bringt uns die folgende Aussage ein Stück weiter:

4.2.5 Lemma

Sei $I \subseteq AJ(\alpha,\beta)$ ein abgeschlossenes Ideal und $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\phi(f) = 0 \quad \forall\, f \in I$. Dann ist $\operatorname{spt}\phi \subseteq co(I)$.

Beweis:

Folgende Implikation ist zu zeigen: $x \notin co(I) \Rightarrow x \notin \operatorname{spt}\phi$.

Sei also $x \notin co(I)$; da $co(I)$ abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung U von x, die disjunkt ist zu einer Umgebung von $co(I)$. Sei nun $f \in AJ(\alpha,\beta)$ mit $\operatorname{spt} f \subseteq U$.
Da der Strukturraum von $AJ(\alpha,\beta)$ gleich dem Intervall $[-1,1]$ ist (siehe [IU], Theorem 1), ist Satz 4.1.1 anwendbar, und es gilt: $f \in j(co(I)) \subseteq I$; also ist $\phi(f) = 0$.
Daraus folgt, daß $x \notin \operatorname{spt}\phi$. □

Da uns vor allem die Ideale mit einpunktigem Kospektrum interessieren, wollen wir die Funktionale mit einpunktigem oder leerem Träger weiter untersuchen:

4.2.6 Korollar

Sei $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\operatorname{spt}\phi \subseteq \{x\}$, $x \in [-1,1]$.

Dann ist $\quad \phi|_S = \sum_{i=0}^{k} c_i\, \delta_x^i \quad$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, $c_i \in \mathbb{C}$,

wobei $\delta_x^i(f) := f^{(i)}(x)$ für $f \in S$

(Für $x = \pm 1$ nehme man die einseitigen Ableitungen.)

Beweis: Zunächst kann man leicht einsehen, daß $\operatorname{spt} \phi|_S = \operatorname{spt} \phi$. Der Rest folgt dann mit [Ru], 6.24 und 6.25. □

Im Folgenden soll untersucht werden, welche Ableitungen auf $AJ(\alpha,\beta)$ stetige Funktionale beschreiben. Dazu bedient man sich einer Reihe von Identitäten und asymptotischen Entwicklungen, die in Szegös Buch [Sz] zu finden sind; Sie seien hier der Übersicht halber zusammengestellt:

4.2.7 Formeln

Die Einschränkung "$\alpha \geq \beta$" ist in den Aussagen (1) bis (5) überflüssig, soll aber danach wieder gelten.

(1) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$ ([Sz], (4.1.3))

(2) $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}$ ([Sz], (4.1.4))

(3) $\frac{d}{dx}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)\, P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ ([Sz], (4.21.7))

(4) $\max\limits_{-1\leq x\leq 1} \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right| = \binom{n+q}{n} \sim n^q$ falls $q := \max(\alpha,\beta) \geq -\frac{1}{2}$ ([Sz], (7.32.2))

(5) $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2}\cdot O(n^{-1/2}) & \text{falls } cn^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \\ O(n^{\alpha}) & \text{falls } 0 \leq \theta \leq cn^{-1} \end{cases}$

und diese Abschätzungen sind bestmöglich. ([Sz], (7.32.5))

Mit diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die Funktionale auf $AJ(\alpha,\beta)$ mit einpunktigem oder leeren Träger zu klassifizieren:

4.2.8 Satz

Die Funktionale $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\operatorname{spt}\phi \subseteq \{x_0\} \subseteq [-1,1]$ sind genau die Folgenden:

$$\phi = \sum_{i=0}^{k} c_i \delta_{x_0}^{i} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C}$$

$$\text{und} \quad k = k(x_o) := \begin{cases} [\alpha - \beta] & \text{falls} \quad x_o = -1 \\ [\alpha + 1/2] & \text{falls} \quad -1 < x_o < 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x_o = 1 \end{cases}$$

Beweis:

(i) Allgemeine Betrachtungen:
Aus 4.2.7 (2), (3) und (5) erhält man zunächst eine asymptotische Abschätzung für $\delta^i_{x_o} P_n^{(\alpha,\beta)}$, aus der man mittels (4) die folgende Formel gewinnt:

$$\delta^i_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} O(n^{i-(\alpha-\beta)}) & \text{falls} \quad x_o = -1 \\ O(n^{i-(\alpha+1/2)}) & \text{falls} \quad -1 < x_o < 1 \\ O(n^i) & \text{falss} \quad x_o = 1 \end{cases}$$

Da diese Abschätzungen bestmöglich sind, ist $(\delta^i_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)})_n$ genau dann beschränkt, wenn $i \leq k = k(x_o)$.

(ii) Sei $\phi = \sum_{i=o}^{k} c_i \delta^i_{x_o}$; dann folgt aus der Beschränktheit von $(\delta^i_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)})_n$, daß ϕ ein stetiges Funktional auf $AJ(\alpha,\beta)$ beschreibt; insbesondere folgt daraus auch, daß alle vorkommenden Ableitungen auf $AJ(\alpha,\beta)$ existieren.
Es ist klar, daß $\mathrm{spt}(\phi) \subseteq \{x_o\}$.

(iii) Sei nun $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\mathrm{spt}\,\phi \subseteq \{x_o\}$.
Dann ist nach 4.2.6 $\phi|_S = \sum_{i=o}^{k'} \delta^i_{x_o}$ für ein $k' \in \mathbb{N}_o$ und $c_i \in \mathbb{C}$.
Angenommen, es sei $k' > k(x_o)$ und $c_{k'} \neq 0$. Dann ist $(\delta^{k'}_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)})_n$ nicht beschränkt, und es ist eine Standard-Aufgabe aus der Analysis, eine absolut konvergente Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ zu konstruieren, so daß $\sum_{n=o}^{\infty} a_n \delta^{k'}_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)}$ divergiert; man kann darüber hinaus sogar noch fordern, daß $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n \delta^i_{x_o} R_n^{(\alpha,\beta)}| < \infty$ ist für alle $i < k'$.

Aus diesen Überlegungen läßt sich schließen, daß

$f_N := \sum_{n=0}^{N} a_n R_n^{(\alpha,\beta)}$ zu einem $f \in AJ(\alpha,\beta)$ konvergiert,

$\phi(f_N)$ aber divergiert, d.h. $\phi \notin AJ(\alpha,\beta)^*$.

Also war die Annahme falsch, und ϕ ist von der Form wie im Satz angegeben. □

Nun steht nichts mehr im Wege um endlich die abgeschlossenen Ideale mit einpunktigem Kospektrum klassifizieren zu können:

4.2.9 Satz

Die abgeschlossenen Ideale in $AJ(\alpha,\beta)$ mit Kospektrum $\{x_o\} \subseteq [-1,1]$ sind genau die Folgenden:

$$I_j := \{f \in AJ(\alpha,\beta) : f(x_o) = f'(x_o) \dots = f^{(j)}(x_o) = 0\},$$

$$\text{wobei } 0 \leq j \leq k \text{ und } k = k(x_o) = \begin{cases} [\alpha - \beta] & \text{falls } x_o = -1 \\ [\alpha + 1/2] & \text{falls } -1 < x_o < 1 \\ 0 & \text{falls } x_o = 1 \end{cases}$$

Weiterhin gilt: $I_o \supsetneq I_1 \dots \supsetneq I_k$.

Beweis:

(i) Da alle vorkommenden Ableitungen in $AJ(\alpha,\beta)$ definiert sind und dort stetige Funktionale beschreiben, sind die I_j abgeschlossene Teilräume von $AJ(\alpha,\beta)$. Daß sie Ideale sind, erkennt man, wenn man die Produktregel für höhere Ableitungen anwendet. Die Echtheit der Inklusionen folgt aus der Tatsache, daß $S \subseteq AJ(\alpha,\beta)$.

(ii) Es bleibt zu bleibt zu zeigen, daß es in $AJ(\alpha,\beta)$ keine weiteren abgeschlossenen Ideale mit Kospektrum $\{x_o\}$ als die angegebenen gibt.

Sei also I ein abgeschlossenes Ideal mit Kospektrum $\{x_o\}$ und $A(I) := \{\phi \in AJ(\alpha,\beta)^* : \phi(f) = 0 \;\; \forall f \in I\}$;

dann ist $I = \{f \in AJ(\alpha,\beta) : \phi(f) = 0 \;\; \forall \phi \in A(I)\}$.

Sei nun $\phi \in A(I) \setminus \{0\}$; nach 4.2.5 und 4.2.8 ist dann

$$\phi = \sum_{i=0}^{N} c_i \delta_{x_o}^i \quad \text{für ein } N \leq k \text{ und } c_N \neq 0.$$

Da I ein Ideal ist, ist $\phi(fg) = 0$ für alle $f \in I$

und $g \in AJ(\alpha,\beta)$. Wähle nun ein $g_N \in S$ so, daß $g_N(x_o) = \dots g_N^{(N-1)}(x_o) = 0$ und $g_N^{(N)}(x_o) \neq 0$.
Aus $\phi(fg_N) = 0$ folgt dann aber, daß $f(x_o) = 0$ ist für alle $f \in I$.
Entsprechend sieht man, daß für ein $g_{N-1} \in S$ mit $g_{N-1}(x_o) = \dots g_{N-1}^{(N-2)}(x_o) = 0$, $g_{N-1}^{(N-1)}(x_o) \neq 0$ aus den Gleichungen $\phi(fg_{N-1}) = 0$ und $f(x_o) = 0$ folgt, daß $f'(x_o) = 0$ ist für alle $f \in I$. Wenn man diesen Weg weiter verfolgt, findet man schließlich heraus, daß $f(x_o) = f'(x_o) = \dots f^{(N)}(x_o) = 0$ ist für alle $f \in I$.

Insgesamt haben wir somit gezeigt:

$$\sum_{i=o}^{N} c_i \delta_{x_o}^i \in A(I), \quad c_N \neq 0 \Rightarrow \delta_{x_o}^i \in A(I) \quad \text{für } 0 \leq i \leq N.$$

Falls nun j der größte Grad aller Ableitungen ist, die in den Linearkombinationen von $A(I)$ auftauchen, dann sind $\delta_{x_o}, \dots \delta_{x_o}^j \in A(I)$, und diese Funktionale spannen $A(I)$ auf; daher ist

$$I = I_j = \{f \in AJ(\alpha,\beta) : f(x_o) = \dots f^{(j)}(x_o) = 0\} .$$

Aus den Herleitungen ist klar, daß $j \leq k$ ist. □

4.2.10 Korollar

a) $\{x_o\} \subseteq (-1,1)$ ist genau dann Spektralmenge für $AJ(\alpha,\beta)$ wenn $\alpha < 1/2$.

b) $\{-1\}$ ist genau dann Spektralmenge, wenn $\beta < \alpha + 1$.

c) $\{1\}$ ist immer Spektalmenge.

4.2.11 Bemerkung

Für starke Hypergruppen K gilt nach 4.1.3 , daß $\{x_o\} \in \hat{K}$ eine Spektralmenge ist, falls x_o im Zentrum von $\hat{K}$ liegt. Das neutrale Element, in unserem Fall also die Eins, liegt immer im Zentrum. Für ultrasphärische Polynome, also falls $\alpha = \beta$ ist, liegt auch $-1 \in \hat{K}$ im Zentrum von $\hat{K}$ (siehe [L3], 4(a)) und bildet daher eine

Spektralmenge. Dies wird durch unsere Aussagen in 4.2.10 bestätigt.

Wir wenden uns nun der Untersuchung von Idealen mit abgeschlossenen Intervallen als Kospektrum zu:

4.2.12 Lemma

Sei $A \subseteq [-1,1]$ eine abgeschlossene Menge, und es existiere ein $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\phi|_{j(A)} \equiv 0$ und $\phi|_{h(A)} \not\equiv 0$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\phi} \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\tilde{\phi}|_{h(A)} = \phi|_{h(A)}$, für das zusätzlich gilt: $\operatorname{spt}\tilde{\phi} \subseteq b(A)$.

Beweis:

Sei $k(A) := \{f \in AJ(\alpha,\beta) : \operatorname{spt}(f) \subseteq A\}$; dann ist $k(A) \cap h(A) = \{0\}$. Definiere nun $\phi_1 \in (k(A) \oplus h(A))^*$ wie folgt: $\phi_1(f+g) := \phi(g)$ für $f \in k(A)$, $g \in h(A)$ und setze ϕ_1 gemäß dem Satz von Hahn-Banach zu einem Funktional $\tilde{\phi} \in AJ(\alpha,\beta)^*$ fort.

Man überprüft leicht, daß $\tilde{\phi}|_{h(A)} = \phi|_{h(A)}$ und daß $\operatorname{spt}\tilde{\phi} \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$. Da aber auch gilt $\tilde{\phi}|_{j(A)} \equiv \phi|_{j(A)} \equiv 0$, ist nach 4.2.5 $\operatorname{spt}\tilde{\phi} \subseteq A$. Also ist $\operatorname{spt}\tilde{\phi} \subseteq b(A)$. □

4.2.13 Satz

Sei $A \subseteq [-1,1]$ ein abgeschlossenes Intervall mit nichtleerem Inneren; dann ist $h(A) = j(A)$; das heißt, A ist eine Spektralmenge.

Beweis:

Angenommen, $h(A) \supsetneqq j(A)$. Dann gibt es ein $\phi \in AJ(\alpha,\beta)^*$ mit $\phi|_{h(A)} \not\equiv 0$ und $\phi|_{j(A)} \equiv 0$; von ϕ kann man nach 4.2.12 auch noch annehmen, daß $\operatorname{spt}\phi \subseteq b(A) = \{a, b\}$, wobei a und b die Endpunkte von A seien. Daraus folgt mit einer harmlosen Verallgemeinerung von 4.2.6, daß

$$\phi = \sum_{i=0}^{k} c_i \delta_a^i + \sum_{j=0}^{k} d_j \delta_b^j \quad \text{mit} \quad k = [\alpha + 1/2].$$

(Ohne Einschränkung sei $\{a, b\} \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Ansonsten ist $b(A)$ einelementig oder leer.)

Nun gilt aber für jedes $f \in h(A)$, daß $f|_A \equiv f'|_A \dots \equiv f^{(k)}|_A \equiv 0$ und damit $\phi|_{h(A)} = 0$, ein Widerspruch!

Folglich ist $h(A) = j(A)$ und A eine Spektralmenge. (Vgl. 4.1.1) $\square$

4.2.14 Bemerkung

Mit Hilfe von 4.2.10 und 4.2.13 kann man für eine große Klasse von abgeschlossenen Mengen in $[-1, 1]$ angeben, ob sie Spektralmengen sind oder nicht.

4.2.15 Bemerkung

Da $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$ ist (siehe 4.2.7 (1)), behalten alle Aussagen in 4.2 ihre Gültigkeit auch für $\beta \geq \alpha$, wenn man die Rollen von α und β, sowie von -1 und 1 vertauscht.

4.3 Bessel-Funktionen

Dieses Kapitel knüpft an 2.3 und 3.3 an. Dementsprechend seien hier $B_x = B_x^{(\nu)}$, $K = K_\nu$, $dm(x) = dm_\nu(x)$ definiert. (Der Index $\nu > -1/2$ wird fallweise ignoriert oder mitgeschleift, je nach Notwendigkeit.)

Wir erinnern uns daran, daß für halbganzzahlige ν, also $\nu = (n-2)/2$, $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ die Hypergruppe $K_\nu = (\mathbb{R}^n, SO(n))$ und $L^1(K_\nu)$ isomorph zu den radialen, integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist. Diese waren auch früher schon häufig Gegenstand von Untersuchungen, so z.B. in [R3] und [Ga]. Mittelpunkt unserer Untersuchungen soll die Frage sein, ob Punkte in K Spektralmengen für $A(K_\nu)$ sind.

Den Spezialfällen $\nu = 0$ und $\nu = 1/2$ (dies entspricht $n = 2$ bzw. $n = 3$) wird in den bereits klassischen Arbeiten von Herz ([H]) und Schwartz ([Sc]) nachgegangen: Herz konnte zeigen, daß S^1 bezüglich $A(\mathbb{R}^2)$ eine Spektralmenge ist, und Schwartz, daß S^2 bezüglich $A(\mathbb{R}^3)$ keine Spektralmenge ist. Der Zusammenhang dieser Resultate mit unseren Untersuchungen wird hergestellt durch den folgenden

4.3.1 Satz

Sei G eine $[FIA]_B^-$ - Gruppe und $H = (G, B)$ die zugehörige Hypergruppe. Dann ist $\{x\} \subseteq \hat{H}$ eine Spektralmenge bezüglich $A(\hat{H})$ genau dann, wenn die Menge $\{x \circ \beta : \beta \in B\}$ $\subseteq \hat{G}$ eine Spektralmenge bezüglich $A(\hat{G})$ ist.

Beweis: Siehe [L 2], Satz 5 . □

Varopoulos hat in [V] diese Resultate beträchtlich erweitert, indem er die abgeschlossenen Ideale in $A(\mathbb{R}^n, SO(m))$, deren Kospektrum genau eine nicht-triviale $SO(n)$-Bahn ist, klassifiziert. Er bedient sich dabei nicht unwesentlich der Tatsache, daß Funktionale auf $A(\mathbb{R}^n, SO(n))$ Distributionen sind, was er kommentarlos in einem Nebensatz feststellt. Da uns dieses Faktum durchaus nicht trivial erschien, wird es in 4.3.2 bewiesen.

In seinen beiden Arbeiten [S1] und [S 2] geht Schwartz über den durch $(\mathbb{R}^n, SO(n))$ vorgegebenen (also diskreten) Rahmen hinaus und untersucht die von uns mit $A(\hat{K}_\nu)$, $\nu > -1/2$ bezeichnete Algebra von Fourier-Transformierten (Schwartz nennt sie "Hankel transforms".), wobei Bessel-Funktionen der Ordnung ν zugrunde liegen. Schwartz zeigt weiterhin, daß es für $y_o > 0$ und $\nu \geq 1/2$ mindestens zwei verschiedene, abgeschlossene Ideale in $A(\hat{K})$ mit Kospektrum $\{y_o\}$ gibt, und $\{y_o\}$ in diesem Falle also keine Spektralmenge ist. Für $\nu < 1/2$ liegt keine Aussage vor; das wird in dieser Arbeit nachgeholt, ebenso wie eine vollständige Klassifizierung der Ideale mit einpunktigem Kospektrum.

Die Herleitungen dazu verlaufen annähernd parallel zu denen von Kapitel 4.2, auch wenn hier andere Beweistechniken von Nöten sind.

Wie bereits angekündigt, wird zunächst einmal gezeigt, daß die Funktionale mit geeignetem Träger auf $A(\hat{K})$ Distributionen sind:

4.3.2 Lemma

Sei $\phi \in A(\hat{K})^*$ mit $\operatorname{spt}\phi = C$, wobei $C \subseteq \mathbb{R}^+$ und C kompakt ist. Dann ist $\phi|_T \in T^*$, wobei $\underline{T}$ die Menge der auf $\mathbb{R}_o^+$

eingeschränkten Funktionen aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist, versehen mit der von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vererbten Topologie.

Beweis:

(i) Zunächst ist nach [S2], Lemma 1.1(b) $T \subseteq A(\hat{K})$, und somit ist $\phi|_T$ zumindest als lineare Abbildung wohl definiert.

(ii) Sei nun $(f_i)_i$ eine Nullfolge in T; zu zeigen bleibt dann, daß $\phi(f_i) \longrightarrow 0$.
Wähle dazu eine beschränkte offene Umgebung $\tilde{C} \subseteq \mathbb{R}^+$ von C und eine Funktion $g \in T$ mit $g|_{\tilde{C}} \equiv 1$, die außerhalb einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^+$ verschwindet. Dann ist $\phi(g \cdot f_i) = \phi(f_i)$, weil $\operatorname{spt} \phi \subseteq C$.
Es reicht also, zu zeigen, daß $\phi(g_i) \longrightarrow 0$, wobei $g_i := g \cdot f_i$. Dazu aber wiederum genügt der Nachweis, daß $\|g_i\|_{A(\hat{K})} \longrightarrow 0$, da ja ϕ stetig auf $A(K)$ operiert.
Weil aber für die g_i sicherlich die Umkehrformel 3.3.4 anwendbar ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß $\|\hat{g}_i\|_1 \longrightarrow 0$.

(iii) Es wird zunächst gezeigt: $g_i \longrightarrow 0$ in T:
Nach der Leibnitzregel ist

$$g_i^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} g^{(m-k)}(x)\, f_i^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} c_{k,m}(x)\, f_i^{(k)}(x)$$

$$\text{mit } c_{k,m}(x) := \binom{m}{k} g^{(m-k)}(x) \quad .$$

Definiere $C_{k,m} := \sup_{x \in D} |c_{k,m}(x)|$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_0^+} |g_i^{(m)}(x)| = \sup_{x \in D} |g_i^{(m)}(x)| \leq \sum_{k=0}^{m} C_{k,m} \sup_{x \in D} |f_i^{(k)}(x)|$$

$\xrightarrow{i \to \infty} 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, da (f_i) eine Nullfolge in T ist.
Da außerdem $\operatorname{spt} g_i \subseteq C$ $\forall i$, gilt $g_i \longrightarrow 0$ in T.

(iv) Man definiere nun $g_i^{[0]} := g_i$

$$\text{und } g_i^{[n]} := \left(\frac{d}{dx} g_i^{[n-1]}\right)/x \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad .$$

Dann ist $\operatorname{spt} g_i^{[n]} \subseteq D$ und mit Induktion folgt aus

Lemma 4.3.3, daß $g_i^{[n]} \longrightarrow 0$ konvergiert für $i \longrightarrow \infty$ und n beliebig aber fest.

Nach Definition ist

$$\hat{g}_i(t) = \int_0^\infty B_x(t)\, g_i(x)\, dm(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{J_\nu(tx)}{(tx)^\nu} (2^\nu \Gamma(\nu+1))\, g_i(x)\, (\Gamma(\nu+1)2^\nu)^{-1}\, x^{2\nu+1}\, dx$$

$$= \int_0^\infty (tx)^{\nu+1}\, J_\nu(tx)\, g_i(x)\, dx\, t^{-(2\nu+1)}$$

$$\overset{(*)}{=} -\int_0^\infty (tx)^{\nu+1}\, J_{\nu+1}(tx) \frac{1}{t}\, g_i'(x)\, dx\, t^{-(2\nu+1)}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{J_{\nu+1}(tx)}{(tx)^{\nu+1}}\, g_i^{[1]}(x)\, x^{2(\nu+1)+1}\, dx$$

$$= \ldots .(**)$$

$$= \int_0^\infty \frac{J_{\nu+n}(tx)}{(tx)^{\nu+n}}\, g_i^{[n]}(x)\, x^{2(\nu+n)+1}\, dx\, (-1)^n .$$

(Erläuterung: Bei der Umformung (*) wurde partiell integriert und dabei benutzt, daß $z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)$ eine Stammfunktion von $z^{\nu+1}J_\nu(z)$ ist; siehe dazu [W], S 132 Gleichung (1). Die Schritte, die in den obigen Umformungen von der zweiten zur fünften Zeile führen, werden formal in (**) noch weitere (n-1) Mal durchgeführt.)

Da $J_\nu(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt (vgl. A4.2c) und $0 \notin D$, ist die Menge $\{|J_{\nu+n}(tx)| : t \geq 1,\ x \in D\}$ beschränkt. Es gibt daher ein $M_n \in \mathbb{R}$, so daß

$$M_n \geq \int_D |J_{\nu+n}(tx)|\, x^{\nu+n+1}\, dx \qquad \text{für alle}$$

$t \geq 1$. Folglich ist

$$|\hat{g}_i(t)\, t^{\nu+n}| \leq M_n \sup_{x \in D} |g_i^{[n]}(x)| \quad =: \varepsilon_i(n) \quad \text{für } t \geq 1$$

und letzteres konvergiert gegen 0 für $i \longrightarrow \infty$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.

Weiterhin ist $\left\{ \dfrac{J_{\nu+n}(tx)}{(tx)^{\nu+n}} \cdot x^{2(\nu+n)+1} : t \leq 1,\ x \in D \right\}$

beschränkt. (Vgl. A4.2b) Ähnlich wie bei den obigen Überlegungen kann man schließen, daß $|\hat{g}_i(t)| \leq \delta_i$ für $t \leq 1$, und δ_i konvergiert gegen 0 für $i \to \infty$.

Nun ist aber für $k \geq \nu + 3$

$$\|\hat{g}_i\|_1 = \int_0^\infty |\hat{g}_i(t)| \cdot t^{2\nu+1} \, (\Gamma(\nu+1)\, 2^\nu)^{-1} \, dt$$

$$\leq \Big(\int_0^1 |\hat{g}_i(t)| \cdot t^{2\nu+1} \, dt + \int_1^\infty |\hat{g}_i(t)| \cdot t^{\nu+k} \, t^{-2} \, dt\Big) \, (\Gamma(\nu+1)\, 2^\nu)^{-1}$$

$$\leq \Big(\delta_i + \int_1^\infty \varepsilon_i(k) \, t^{-2} \, dt\Big) \cdot (\Gamma(\nu+1)\, 2^\nu)^{-1}$$

$$\leq (\delta_i + \varepsilon_i(k)) \, (\Gamma(\nu+1)\, 2^\nu)^{-1} \quad .$$

Da letzteres gegen 0 konvergiert, ist der Beweis vollständig. □

4.3.3 Lemma

Sei $(g_i)_i$ eine Nullfolge in T und es existiere eine kompakte Menge $D \subseteq \mathbb{R}^+$ so, daß $\mathrm{spt}(g_i) \subseteq D$ Dann ist auch $(g_i(x)/x)_i$ eine Nullfolge in T.

Beweis: Zunächst ist klar, daß $(g_i(x)/x)_i \subseteq T$, da $0 \notin \mathrm{spt}(g_i)$; Da außerdem $\mathrm{spt}(g_i(x)/x) \subseteq D \quad \forall i \in \mathbb{N}$, bleibt zu zeigen, daß alle Ableitungen für $i \to \infty$ gleichmäßig in x gegen 0 konvergieren. Da $g_i \longrightarrow 0$ in T, $0 \notin \mathrm{spt}(g_i)$ und somit x^{-n} in x beschränkt ist, reicht es zu zeigen, daß diese Ableitungen von der

Form $\quad (*) \quad \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{g_i^{(m_\lambda)}(x)}{x^{n_\lambda}} \quad$ mit $n_\lambda, m_\lambda \in \mathbb{N}$ sind.

Weil aber gilt, daß

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{\lambda=1}^{k} g_i^{(m_\lambda)}(x)\, x^{-n_\lambda}\Big) = \sum_{\lambda=1}^{k} \big(x^{-n_\lambda} g_i^{(m_\lambda+1)}(x) - n_\lambda x^{-n_\lambda-1} g_i^{(m_\lambda)}(x)\big)$$

erhält man die Behauptung (*) aus einem einfachen Induktionsansatz. □

Wir erinnern an die folgenden Fakten, die für die kommenden Beweise herangezogen werden:

4.3.4

(1) Für $g \in L^1(K)$ ist

$$\frac{d^n}{dx^n}\hat{g}(x) = \int_0^\infty \left(\frac{d^n}{dx^n} B_x(t) \right) g(t)\, dm(t) \ ,$$

falls $(\frac{d^n}{dx^n} B_x(t))\cdot g(t)$ m-integrierbar ist.

(Dies folgt aus dem Satz über die konvergente Majorante.)

(2) $\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ ([EMOT], 7.2.8(51))

(3) $J_\nu(x) = O(x^{-1/2})$ für $x \longrightarrow \infty$, und diese Abschätzung ist bestmöglich. (Siehe [EMOT], 7.13.1(3))

4.3.5 Satz

Ein Funktional $\phi \in A(K)^*$ mit kompaktem Träger $D \subseteq \mathbb{R}^+$ ist eindeutig bestimmt durch seine Einschränkung auf T. Diese ist seinerseits ein Funktional auf T, also eine Distribution.

Beweis:
Für $g \in C_{oo}(K)$ ist $\hat{g}(x) = \int_0^\infty B_x(t)\, g(t)\, dm(t)$ beliebig oft nach x differenzierbar. (Dies folgt aus 4.3.4 (1) und 2.3.1.) Sei nun ein $\phi|_T$ mit kompakten Träger vorgegeben. Dann ist dadurch auch $\phi|_{(C_{oo}(K))^\wedge}$ eindeutig bestimmt, da die Funktionen in $(C_{oo}(K))^\wedge$ unendlich oft differenzierbar sind. $(C_{oo}(K))^\wedge$ ist aber dicht in $A(\hat{K})$, da $C_{oo}(K)$ dicht liegt in $L^1(K)$, und somit ist ϕ eindeutig festgelegt.
Der zweite Teil der Aussage wurde in 4.3.2 gezeigt. □

Wie im letzten Kapitel wird nun eine Beziehung zwischen dem Kospektrum eines Ideals und den Trägern der Funktionale, die dieses Ideal anullieren, hergestellt:

4.3.6 Lemma

Sei $I \subseteq A(\hat{K})$ ein abgeschlossenes Ideal und $\phi \in (A(\hat{K}))^*$ mit $\phi(f) = 0 \;\; \forall f \in I$; dann ist $\operatorname{spt}(\phi) \subseteq \operatorname{co}(I)$.

Beweis: Analog 4.2.5; man muß lediglich beachten, daß $\mathbb{R}_0^+$ der Strukturraum von $A(\hat{K})$ ist. (Siehe [S 2], 4.1) □

Das folgende Lemma wird sich als nützlich für den nächsten Satz erweisen:

4.3.7 Lemma

$\left(\frac{d^k}{dx^k} B_x^{(\nu)}(t)\right) = O(t^{k-(\nu+1/2)})$ und diese Abschätzung ist bestmöglich.

Beweis:

(*) $\left(\frac{d^k}{dx^k} B_x(t)\right) = t^k B_1^{(\nu,k)}(xt)$, wobei $B_1^{(\nu,k)}$ die k-te Ableitung der Funktion $B_1^{(\nu)}$ sei.

Nach 4.3.4(2) ist aber

$$\frac{d}{dx} B_1^{(\nu)}(x) = -x\, B_1^{(\nu+1)}(x) \quad .$$

Daraus beweist man durch Induktion, daß für höhere Ableitungen gilt:

$$\frac{d^k}{dx^k} B_1^{(\nu)}(x) = (-1)^k x^k B_1^{(\nu+k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} B_1^{(\nu+i)}(x) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} c_{i,j}\, x^j$$

mit Konstanten $c_{i,j}$. Da $B_1^{(\nu)}(x) = O(x^{-1/2-\nu})$ (4.3.4(3) und Def. von B) trägt im obigen Ausdruck nur der erst Summand zum assymptotischen Verhalten bei, und es gilt:

$$\frac{d^k}{dx^k} B_1^{(\nu)}(x) = O(x^{-1/2-\nu}) \quad .$$

Also folgt der erste Teil der Aussage des Lemmas mit (*); alle vorkommenden Abschätzungen waren bestmöglich, also auch die des Lemmas. □

4.3.8 Satz

Die Funktionale $\phi \in A(\hat{K}_\nu)^*$ mit $\mathrm{spt}(\phi) \subseteq \{x_o\} \subseteq \mathbb{R}^+$ sind genau die folgenden:

$$\phi = \sum_{i=o}^{k} c_i \delta^i_{x_o} \quad \text{mit } k = [\nu + 1/2] \text{ und } c_i \in \mathbb{C}.$$

Beweis:

(i) Sei $\phi = \sum_{i=o}^{k} c_i \delta^i_{x_o}$ und $f \in A(\hat{K}_\nu)$; dann ist

$$\hat{f}^{(i)}(x_o) = \int_o^\infty \left(\frac{d^i}{dx^i} B_x^{(\nu)}(t)\Big|_{x=x_o}\right) f(t)\, dm\,(t), \quad \text{für } i \leq k,$$

da $\frac{d^i}{dx^i} B_x^{(\nu)}(t)\Big|_{x=x_o}$ beschränkt ist in t (siehe 4.3.7) und f m-integrierbar ist (vgl. 4.3.4(1)). Man sieht ferner, daß für $i \leq k$ die Abbildung $f \mapsto f^{(i)}(x_o)$ stetig ist, und somit beschreibt ϕ ein stetiges Funktional auf $A(K\ )$ mit Träger $\{x_o\}$ oder $\emptyset$.

(ii) Sei nun $\phi \in A(\hat{K}_\nu)^*$ mit $\mathrm{spt}(\phi) \subseteq \{x_o\}$. Wegen 4.3.5 ist $\phi|_T$ eine Distribution und wie in 4.2.6 kann man einsehen, daß

$$\phi|_T = \sum_{i=o}^{k'} c_i \cdot \delta^i_{x_o} \quad \text{für ein } k' \in \mathbb{N} \text{ und } c_i \in \mathbb{C}.$$

Angenommen, es sei $k' > k$ und $c_{k'} \neq 0$. Wegen der Aussage von 4.3.7 läßt sich nun mit etwas technischem Aufwand ein $f \in L^1(K_\nu)$ konstruieren, so daß

$$\int_o^\infty \left(\frac{d^i}{dx^i} B_x^{(\nu)}(t)\Big|_{x=x_o}\right) f(t)\, dm\,(t)$$

für $i = k'$ divergiert und für $i < k'$ konvergiert.

Definiere $f_s(t) := \begin{cases} f(t) & \text{falls } t \leq s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; dann ist $\hat{f}_s \in T$ $\forall s \in \mathbb{R}$ und $f_s \longrightarrow f$ in $A(\hat{K}_\nu)$ für $s \longrightarrow \infty$.

Aus der Konstruktion von f folgt aber, daß $f_s^{(k')}(x_o)$ und auch $\phi(f_s)$ divergieren für $s \longrightarrow \infty$. Also ist $\phi \notin A(K_\nu)^*$, die Annahme ist falsch, und ϕ ist wie im Satz angegeben. $\square$

4.3.9 Satz

Die abgeschlossenen Ideale in $A(\hat{K}_\nu)$ mit Kospektrum $\{y\} \subseteq \mathbb{R}^+$ sind gerade die folgenden:

$$I_k = \{f \in A(\hat{K}_\nu) : f(y) = f'(y) = \ldots f^{(k)}(y)\} \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \quad k \leq \nu + 1/2.$$

Weiterhin gilt: $I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_{[\nu+1/2]}$

Beweis:

Zunächst überzeugt man sich leicht davon, daß alle I_k Ideale sind (Produktregel für höhere Ableitungen) und daß sie abgeschlossen sind, da die sie beschreibenden Funktionale nach 4.3.5 stetig sind. Die Echtheit der angegebenen Inklusionen ist eine Folge der Tatsache, daß $T \subsetneq A(\hat{K}_\nu)$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß es nicht mehr abgeschlossene Ideale mit Kospektrum $\{y\}$ gibt, als die oben angegebenen: Sei I ein solches Ideal; dann zeigt man ganz analog zu 4.2.9, daß I von der angegebenen Form ist. □

4.3.10 Korollar

a) Sei $y \neq 0$; dann ist $\{y\}$ Spektralmenge von $A(\hat{K}_\nu)$ genau dann, wenn $\nu < 1/2$.

b) $\{0\}$ ist stets Spektralmenge von $A(\hat{K}_\nu)$.

Beweis:

a) klar mit 4.3.9.

b) Da 0 im Zentrum von $A(\hat{K}_\nu)$ liegt, folgt dies aus 4.1.3. □

4.3.11 Satz

Sei A ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}_0^+$ mit $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Dann ist A Spektralmenge.

Beweis: analog 4.2.12 und 4.2.13. □