3. L^1-Algebren und Fouriertransformationen

3.1 Allgemeines

Aufgabe der harmonischen Analyse ist die Untersuchung solcher Funktionen, die sich aus einer Familie von gegebenen Funktionen entwickeln lassen, etwa durch Reihen- oder Integralbildung. Es wurden in diesem Zusammenhang auch stets Faltungen und "Fourier-ähnliche" Transformationen entwickelt und diskutiert. Für den Fall der Jacobi-Polynome seien hier nur die Arbeiten [AW], [G 3], [Sz], und [CM] erwähnt, für Bessel-Funktionen [S 1], [S 2], [Le] und [W]. Die mit Bessel-Funktionen eng verwandten radialen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ (siehe Bsp. 2.1.4) werden unter anderem in [Ga] und [R 3] untersucht.

Die Analogie der dort behandelten Sachverhalte zur klassischen harmonischen Analyse auf lokalkompakten abelschen Gruppen scheint evident. In den erwähnten Arbeiten ist darauf auch häufig hingewiesen, ohne jedoch einen gemeinsamen Rahmen anzugeben. Dieser wird durch das Konzept der Hypergruppen angeboten, welches einerseits allgemein genug gehalten ist, um sowohl die lokalkompakten abelschen Gruppen wie auch eine Vielzahl von Klassen spezieller Funktionen abzudecken, auf der anderen Seite aber doch genug Struktur aufweist, um "schöne" Resultate aus der klassischen harmonischen Analyse herzuleiten. (Siehe z.B. [J])

Neben einer einheitlichen Darstellung einer Vielzahl bekannter Eigenschaften solcher Funktionenklassen hat die Betrachtungsweise mittels Hypergruppen den Vorteil, daß man viele Ergebnisse "automatisch" durch die Hypergruppentheorie erhält und nicht von Fall zu Fall eigens beweisen muß (so z.B. die Tatsache, daß $(L^1(K), *)$ eine Banachalgebra ist).

Ziel dieses Abschnitts ist es nun, für den Fall der, -jeweils leicht modifizierten-, Jacobipolynome $R_n^{(\alpha,\beta)}$ und Bessel-Funktionen $B_x^{(\nu)}$ Eigenschaften der L^1-Algebren und ihrer Transformierten im Rahmen der Hypergruppentheorie herauszuarbeiten und so unter anderem auch die Grundlagen für die folgenden Abschnitte 4 und 5 zu schaffen.

3.2 Jacobi-Polynome

In diesem Kapitel 3.2 seien $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ wie in 2.2 ein für alle Mal fest gewählt und $R_n := R_n^{(\alpha,\beta)}$ die normalisierten Jacobi-Polynome. $K = K^{(\alpha,\beta)}$ bezeichne stets die dazu gehörige, in 2.2.1 hergeleitete Hypergruppenstruktur auf $\mathbb{N}_0$ und $\hat{K} = \hat{K}^{(\alpha,\beta)}$ die dazu duale Hypergruppe auf dem Intervall $[-1,1]$. Im übrigen gelte die Notation wie in 2.2. (Auf die Angabe von α und β wird verzichtet, falls Irrtümer ausgeschlossen sind.)

Man definiere $\underline{L^p(K)} := \left\{ f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C} \; : \; \|f\|_p < \infty \right\}$,

wobei $\underline{\|f\|_p} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p \cdot h(n) \right)^{1/p}$, $p > 0$.

Für $p = 1$ ist eine Faltung $*: L^1(K) \times L^1(K) \longrightarrow L^1(K)$

definiert durch $(f * g)(n) := \sum_{m=0}^{\infty} f(m*n) \cdot g(m) \cdot h(m)$,

wobei $f(m*n) = \sum_{k=|m-n|}^{m+n} g(m,n,k)\, f(k)$ und h wie in 2.2.2a .

(Vgl. A1.4 und A2.5)

3.2.1 Proposition

Mit den obigen Bezeichnungen ist $(L^1(K), *, \| \|_1)$ eine Banach-Algebra von komplexwertigen Folgen. Insbesondere ist also $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ für $f,g \in L^1(K)$.

Die Funktion $\underline{\delta_0(x)} := \begin{cases} 1 & \text{für } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist das Einselement dieser Algebra.

Beweis: Der erste Teil folgt mit [J], 6.2G, der zweite ist evident (und charakteristisch für diskrtete Hypergruppen). □

3.2.2 Die Fourier-Transformierten

Interessanter als die oben definierten L^1-Folgen sind ihre Fourier-Transformierten, nämlich die absolut konvergenten Reihen von Jacobi-Polynomen (vgl. [CM]). Zu $f \in L^1(K)$ ist $\hat{f}$ definiert durch

$$\underline{\hat{f}(x)} := \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot R_n(x)\, h(n) \quad \text{für } x \in [-1,1] = \hat{K}$$

Da $|R_n(x)| \leq 1$ für $x \in [-1,1]$ ist die obige Reihe absolut konvergent. Weiterhin sei $\underline{A(\hat{K})} := \{\hat{f} : f \in L^1(K)\}$. Für $f \in A(\hat{K})$ sei $\|f\|_{A(\hat{K})} := \|f\|_1$. Diese Definition wird erst sinnvoll durch den ersten Teil der folgenden

3.2.3 Proposition

a) Die Abbildung $\hat{}\ : L^1(K) \longrightarrow A(\hat{K})$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

b) $A(\hat{K})$ ist ein dichter Unterraum von $C([-1,1])$.

c) $\|\hat{f}\|_{A(\hat{K})} \geq \|\hat{f}\|_{[-1,1]} \quad \forall f \in A(\hat{K})$.

d) $(A(\hat{K}), \cdot, \|\ \|_{A(\hat{K})})$ ist eine zu $(L^1(K), *, \|\ \|_1)$ isomorphe Banach-Algebra. ($\cdot$ bezeichne die punktweise Multiplikation von Funktionen.)

Beweis:

a) Linearität und Surjektivität von $\hat{}$ sind klar. Die Injektivität folgt aus [J], 7.3D und 6.2I.

b) Siehe [J], 7.3H.

c) Klar, da $|\hat{f}(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| \cdot h(n) \quad \forall x \in [-1,1]$.

d) Hier ist nur noch zu zeigen, daß $\hat{f} \cdot \hat{g} = \widehat{f * g}$ für $f, g \in L^1(K)$. Dies läßt sich aber wie im Gruppenfall direkt nachrechnen. □

3.2.4 Bemerkung

a) $A(\hat{K})$ ist im allgemeinen echt kleiner als $C([-1,1])$, wie wir im Beweis von 4.2.8 sehen werden.

b) Die von $\|\ \|_{A(\hat{K})}$ induzierte Topologie ist feiner als die der gleichmäßigen Konvergenz in $A(\hat{K})$.

c) In 3.2.3d) werden zwei Modelle einer Banach-Algebra zur Verfügung gestellt, das eine mit einer griffigen Multiplikation, das andere mit einer handlichen Norm.

3.2.5 Die Algebra $L^1(\hat{K})$

Wir wissen, daß auch $\hat{K}$ eine Hypergruppe ist, definiert auf dem Intervall $[-1,1]$. Als Haarsches Maß wählen wir

$$\underline{dm = dm^{(\alpha,\beta)}} := d_{\alpha,\beta}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx,$$

mit $\underline{d_{\alpha,\beta}} := \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx$ (vgl. 2.2.2d).

Also lassen sich analoge Überlegungen wie für $L^1(K)$ durchführen. Dies sei im folgenden ohne Beweise skizziert:

Es ist also $\underline{L^p(\hat{K})} := \{g : [-1,1] \to \mathbb{C},\ \|g\|_p < \infty\}$,

wobei $\underline{\|g\|_p} := \left(\int_{-1}^{1} |g(x)|^p\, d_{\alpha,\beta}\, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\, dx\right)^{1/p}$.

(Insbesondere fallen also alle auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen in diese Klassen.) Die Faltung $*$ ist für $f,g \in L^1(\hat{K})$ definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{-1}^{1} f(x*y)\cdot g(y)\, dm(y),$$

und $(L^1(K), *, \|\ \|_1)$ ist eine Banachalgebra; das heißt insbesondere, daß $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\, \|g\|_1$ für $f,g \in L^1(\hat{K})$.

Für $f \in L^1(\hat{K})$ ist die inverse Fourier-Transformierte $\check{f}$ definert durch

$$\underline{\check{f}(n)} := \int_{-1}^{1} f(x)\cdot R_n(x)\, dm^{(\alpha,\beta)}(x).$$

für $n \in \mathbb{N}_o$; man könnte also von den Fourierkoeffizienten $\check{f}(n)$ einer Funktion f sprechen.

Sei weiterhin $\underline{A(K)} := \{\check{f} : f \in L^1(K)\}$ und $\|\check{f}\|_{A(K)} := \|f\|_1$ für $\check{f} \in A(K)$; dann ist $(A(K), \cdot, \|\ \|_{A(K)})$ eine zu $(L^1(\hat{K}), *, \|\ \|_1)$ isomorphe Banach-Algebra.

Schließlich liegt $A(K)$ norm-dicht in der Menge der Nullfolgen ([J], 7.3H), und $\|\check{g}\|_{A(K)} \geq \|\check{g}\|_{\mathbb{N}_o}$ für alle $\check{g} \in A(K)$.

3.2.6 Satz (Umkehrformel)

a) Sei $f \in L^1(K)$; dann ist $f = \check{\hat{f}}$, das heißt

$$f(n) = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=o}^{\infty} f(k)\, R_k(x)\, h(k)\right) R_n(x)\, dm(x), \quad n \in \mathbb{N}_o .$$

b) Sei $g \in C(\hat{K})$ und $\check{g} \in L^1(K)$; dann ist $g = \hat{\check{g}}$, d.h.

$$g(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} g(y)\, R_n(y)\, dm(y)\right) R_n(x)\, h_n(x)\, dx \quad .$$

Beweis: Es ist leicht zu überprüfen, daß f und g die Voraussetzungen der Umkehrformel in [J], 12.2C erfüllen. Da jedoch dm irgend ein Haarsches Maß auf $\hat{K}$ ist (Haarsche Maße können sich um eine nicht-verschwindende multiplikative Konstante unterscheiden), und nicht notwendigerweise das zu $h(n)$ gehörige Plancherelmaß, können sich f und $\check{f}$ (bzw. g und $\hat{g}$) um eine multiplikative Konstante unterscheiden. Diese läßt sich jedoch leicht bestimmen, indem man zum Beispiel in a) $f(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ wählt.□

3.2.7 Korollar

Das zu $h(n)$ gehörige Plancherelmaß auf $\hat{K}$ ist dm.

3.2.8 Satz (Levitan)

a) Für $f \in L^1(K)$ ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

$$\text{D.h.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 \, h(n) = \int_{-1}^{1} |\hat{f}(x)|^2 \, dm(x) \quad .$$

b) Für $g \in L^2(\hat{K})$ ist $\|g\|_2 = \|\check{g}\|_2$.

$$\text{D.h.} \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 \, dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\check{g}(n)| \, h(n) \quad .$$

Beweis: Siehe [J], 7.3I und beachte, daß $L^1(K) \subseteq L^2(K)$ und $L^2(\hat{K}) \subseteq L^1(\hat{K})$.□

3.2.9 Bemerkung

Die Fourier-Transformation $\hat{}$ läßt sich in der üblichen Weise zu einer Isometrie $L^2(K) \longleftrightarrow L^2(\hat{K})$ fortsetzen. (Siehe dazu [J], 7.3 I.)

3.3 Bessel-Funktionen

Die Bezeichnungen seien hier wie im Kapitel 2.3. Insbesondere sei $\nu > -1/2$ für ganz 3.3 ein für alle Mal fest vorgegeben, $K = K_\nu$ die dazu gehörige, in 1.3 beschriebene Hypergruppenstruktur auf $\mathbb{R}_0^+$ und $dm(x) = dm_\nu(x) = (2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1))^{-1} \, x^{2\nu+1} \, dx$ das zugehörige Haarsche Maß.

Dann ist $L^p(K) := \left\{ f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C} \; : \; \|f\|_p < \infty \right\}$,

wobei $\|f\|_p := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dm(x) \right)^{1/p}$, $p > 0$.

Für $p = 1$ ist die Faltung $*: L^1(K) \times L^1(K) \longrightarrow L^1(K)$ erklärt durch $(f*g)(x) = \int\limits_0^\infty f(x*y)\, g(y)\, dm(y)$,

wobei $f(x*y) := c_\nu \int\limits_0^\pi f((x^2+y^2+2xy\cdot\cos\varphi)^{1/2}) \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi$.

(Man bemerkt, daß dies für $\nu = (n-2)/2$ der üblichen Faltung von radialen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ entspricht, wie sie in [Ga] und [R3] untersucht werden.)

Analog zum vorigen Kapitel erhalten wir die folgende

3.3.1 Proposition

Mit den obigen Bezeichnungen ist $(L^1(K), *, \|\ \|_1)$ eine Banach-Algebra von komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}_0^+$. Insbesondere ist daher $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$.

Beweis: Siehe [J], 6.2G □

3.3.2 Die Fourier-Transformierten

Für Anwendungen ist es von Interesse, bestimmte vorgegebene Funktionen aus Bessel-Funktionen zu "entwickeln", d.h. sie als Integral von Bessel-Funktionen darzustellen. Diese Problematik ist unter anderem in [Le], 5.14.10 untersucht. In der vorliegenden Arbeit werden solche Entwicklungen durch Fourier-Transfomationen realisiert. (In Zusammenhang mit Bessel-Funktionen spricht man dabei auch von Hankel-Transformationen.) Formal wird dabei zwar nicht nach den eigentlichen Bessel-Funktionen J_ν, sondern nach den daraus, mittels Division durch x^ν entstandenen $B^{(\nu)}$ entwickelt. Inhaltlich ist das jedoch nichts anderes, da man den störenden Term ja in die zu entwickelnde Funktion stecken kann.

Nun zur Theorie: Für $f \in L^1(K)$ sei $\hat{f}$ definiert durch

$$\hat{f}(x) := \int\limits_0^\infty f(y)\, B_x(y)\, dm(y), \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad \text{und}$$

$$A(\hat{K}) := \{\hat{f} : f \in L^1(K)\} .$$

(Tatsächlich ist die Menge der nach obiger Formel transformierbaren Funktionen größer als $L^1(K)$ und die der so entwickelbaren größer als $A(\hat{K})$; siehe dazu [Le], 5.14.10.)

Für $\hat{f} \in A(\hat{K})$ definiere man $\|\hat{f}\|_{A(\hat{K})} := \|f\|_1$. Entsprechend dem vorigen Kapitel 3.2 gilt die

3.3.3 Proposition

a) Die Abbildung $\wedge$: $L^1(K) \longrightarrow A(\hat{K})$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

b) $A(\hat{K})$ ist ein dichter Unterraum von $C_o(\mathbb{R}_o^+)$.

c) $\|\hat{f}\|_{A(\hat{K})} \geq \|f\|_{\mathbb{R}_o^+}$ für alle $\hat{f} \in A(\hat{K})$.

d) $(A(\hat{K}), \cdot, \| \, \|_{A(\hat{K})})$ ist eine zu $(L^1(K), *, \| \, \|_1)$ isomorphe Banach-Algebra.

Beweis: Siehe Beweis von 3.2.3. □

Die Bemerkung 3.2.4 kann hier wörtlich übernommen werden, wobei lediglich $C([-1,1])$ durch $C_o(\mathbb{R}_o^+)$ zu ersetzen ist.

Es ist hier überflüssig, $L^1(\hat{K})$ zu untersuchen, da K isomorph zu $\hat{K}$ ist (siehe Satz 2.3.5), Als Haarsches Maß auf $\hat{K}$ wähle man ebenfalls $dm(x) = (2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1))^{-1} \, x^{2\nu+1} \, dx$; dies wird sich für die Umkehrformel und die Plancherel-Isometrie als günstig erweisen.

Damit sind die $\| \, \|_p$-Normen für die beiden Hypergruppen K und $\hat{K}$ gleich; also ist auch $L^p(K) = L^p(\hat{K})$, und es gibt keinen Unterschied zwischen der Fourier-Transformation

$\wedge$: $L^1(K) \longrightarrow A(\hat{K})$ und der inversen Fourier-Transformation

$\wedge$: $L^1(\hat{K}) \longrightarrow A(K)$.

3.3.4 Satz (Umkehrformel)

Sei $f \in C(K) \cap L^1(K)$ und zugleich $\hat{f} \in L^1(\hat{K})$;
dann ist $\hat{\hat{f}} = f$, das heißt

$$f(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) \, B_y(z) \, dm(z) \, B_x(y) \, dm(y) \quad .$$

Beweis: Die Voraussetzungen von [J], 12.2C sind erfüllt; es ist lediglich noch nicht geprüft, ob $dm(y)$ das zu $dm(z)$ gehörige Plancherel-Maß ist. Da es aber mit Sicherheit ein Haarsches Maß ist, können sich die beiden Seiten der obigen Gleichung allenfalls durch eine multiplikative Konstante unterscheiden.

Um diese zu ermitteln, bedienen wir uns der Umkehrformel in [Le], 5.14.10:

$$g(x) = \int_0^\infty t \cdot J_\nu(tx) \int_0^\infty \lambda \cdot J_\nu(\lambda t)\, g(\lambda)\, d\lambda\, dt$$

für alle stetigen Funktionen g mit beschränkter Variation, für die $\int_0^\infty |g(x)| \sqrt{x}\, dx < \infty$.

Wähle ein nicht-triviales g nach obigen Vorschriften mit der zusätzlichen Maßgabe, daß $f(x) := g(x)/x^\nu$ die Bedingungen des Satzes erfüllt.

Sei nun

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) &:= \int_0^\infty \lambda\, J_\nu(\lambda t)\, g(\lambda)\, d\lambda \\
&= t^\nu \int_0^\infty 2^\nu\, \Gamma(\nu+1) \frac{J_\nu(\lambda t)}{(\lambda t)^\nu} \frac{g(\lambda)}{\lambda^\nu} (2^\nu\, \Gamma(\nu+1))^{-1} \cdot \lambda^{2\nu+1}\, d\lambda \\
&= t^\nu \int_0^\infty B_t(\lambda)\, f(\lambda)\, dm(\lambda) \\
&= t^\nu \cdot \hat{f}(t) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\nu} \cdot g(x) \\
&= x^{-\nu} \int_0^\infty t \cdot J_\nu(tx)\, \tilde{g}(t)\, dt \\
&= x^{-\nu} \int_0^\infty t^{\nu+1}\, J_\nu(tx)\, \hat{f}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty 2^\nu\, \Gamma(\nu+1) \frac{J_\nu(tx)}{(tx)^\nu} \hat{f}(t)\, (2^\nu\, \Gamma(\nu+1))^{-1} \cdot t^{2\nu+1}\, dt \\
&= \int_0^\infty B_x(t)\, \hat{f}(t)\, dm(t) \\
&= \hat{\hat{f}}(x)
\end{aligned}$$

Da f nicht-trivial gewählt war, kann die oben erwähnte multiplikative Konstante nur 1 sein, womit der Satz bewiesen wäre.

□

3.3.5 Korollar

Das zu $(2^{\nu}\cdot\Gamma(\nu+1))^{-1}\, x^{2\nu+1}\, dx$ gehörige Plancherel-Maß auf $\hat{K}$ ist $(2^{\nu}\cdot\Gamma(\nu+1))^{-1}\, y^{2\nu+1}\, dy$.

3.3.6 Satz (Levitan)

a) Sei $f\in L^1(K)\cap L^2(K)$; dann ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, das heißt

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\, dm(x) = \int_0^\infty \left|\int_0^\infty f(x)\, B_y(x)\, dm(x)\right|^2 dm(y) .$$

b) Die Fourier-Transformation läßt sich zu einer Isometrie $\hat{}: L^2(K)\longleftrightarrow L^2(\hat{K})$ fortsetzen.

Beweis:

a) Siehe [J], 7.3I

b) ergibt sich aus der folgenden

3.3.7 Bemerkung

Die in 3.3.4 und 3.3.6a) zugelassenen Funktionen liegen dicht in $L^1(K)$ und $L^2(K)$, da bereits $C_{oo}(K)$ darin dicht liegt. Weiterhin ist $C_{oo}(K)^{\wedge}$ dicht in $L^2(\hat{K})$. (Siehe [J], 7.3 I.)