2. Hypergruppenstrukturen auf Funktionenklassen

2.1 Allgemeines

Falls sich das Produkt zweier beliebiger Funktionen aus einer gegebenen Klasse linearisieren läßt, d.h. darstellen als Linearkombination oder Integral von Funktionen aus dieser Klasse, so kann man unter geeigneten Umständen eine Hypergruppenstruktur erklären auf der Indexmenge, welche die Funktionenklasse beschreibt. (Definition und wichtige Eigenschaften von Hypergruppen entnehme man aus dem Anhang A 2.) Diese "geeigneten Umstände" werden im folgenden in Form einer Axiomatik beschrieben.

Seien dazu S und X nicht-leere, lokalkompakte Hausdorff-Räume und $(f_x)_{x\in X}$ eine Familie von komplexwertigen Funktionen auf S. Zu jedem Paar $(x,y)\in X\times X$ gebe es ferner ein Maß $m_{x,y}\in M(X)$, so daß

$$f_x(s)\cdot f_y(s) = \int f_z(s)\, dm_{x,y}(z) \qquad \text{für alle } s\in S.$$

2.1.1 Satz

Unter obigen Umständen gilt:
Die Abbildung $(p_x,p_y)\longmapsto m_{x,y}$ läßt sich zu einer **bilinearen** Operation $*: M(X)\times M(X)\longrightarrow M(X)$ fortsetzen, und $(X,*)$ ist eine kommutative Hypergruppe, wenn die folgenden Axiome gelten:

(F 1) Es gibt ein $e\in X$, so daß $f_e(x) = 1 \quad \forall s\in S$
und ein $e'\in X$, so daß $f_x(e') = 1 \quad \forall x\in X$.

(F 2) Die Abbildung $(x,y)\longmapsto m_{x,y}$ ist stetig.

(F 3) Das Maß $m_{x,y}$ ist positiv und hat kompakten Träger $\forall\, x,y\in X$.

(F 4) Die Abbildung $(x,y)\mapsto \operatorname{spt} m_{x,y}$ ist stetig bzgl. der in [J], 2.5 angegebenen Topologie auf der Menge der kompakten Teilmengen von X.

(F 5) Sei $\mu\in M(X)$ und $\int_X f_x(s)\, d\mu(x) = 0 \quad \forall s\in S$; dann ist $\mu = 0$.

(F 6) Es gibt eine Involution $x\longmapsto x^-$ in X mit der Eigenschaft $e\in \operatorname{spt} m_{x,y} \Longleftrightarrow y = x^-$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß (H 1) bis (H 6) (siehe A 2.1) gelten (Kommutativität ist trivial):

(H 3): Nach (F 1) gilt für alle $x,y \in X$:

$$1 = f_x(e') \cdot f_y(e') = \int f_z(e')\, dm_{x,y}(z) = m_{x,y}(X).$$

Also ist $m_{x,y}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Träger nach (F 3) kompakt ist.

(H 2): Ergibt sich nach [J], 2.4 B aus (F 2), (F 3) und (H 3).

(H 1): Zu zeigen ist die Assoziativität von $*$:

Für $x,y,z \in X$ gilt:

$$(f_x \cdot f_y) \cdot f_z = \int f_v \cdot f_z \, d(p_x * p_y)(v)$$
$$= \iint f_w \, d(p_v * p_z)(w)\, d(p_x * p_y)(v)$$

$$f_x \cdot (f_y \cdot f_z) = \int f_x \cdot f_v \, d(p_y * p_z)(v)$$
$$= \iint f_w \, d(p_x * p_v)(w)\, d(p_y * p_z)(v)$$

Also gilt mit (F 5):

$$\int (p_v * p_z) \quad d(p_x * p_y)(v) = \int (p_x * p_v)\, d(p_y * p_z)(v)$$

und dies beweist nach den Bemerkungen in [J], Seite 13 die Assoziativität von $*$.

(H 4): Entspricht (F 4).

(H 5): Folgt unmittelbar aus (F 1) und (F 5).

(H 6): Entspricht (F 6). □

2.1.2 Bemerkung

a) Eine Umkehrung des Satzes gilt nur teilweise:
((H 1) bis (H 6)) $\Longrightarrow$ ((F 1), 2. Teil, (F 2) bis (F 4), (F 6)).

b) (F 1) läßt sich gegebenenfalls durch Normierung erfüllen.

c) Ohne (F 1), 1. Teil und (F 6) liegt eine Halbhypergruppe vor (Vgl. [J], 3.).

2.1.3 Korollar

Für $s \in S$, $x \in X$ sei $\chi_s(x) := f_x(s)$.

a) χ_s ist eine multiplikative Funktion auf X, d.h.

$$\chi_s(x*y) = \chi_s(x) \cdot \chi_s(y) \qquad \forall\, x,y \in X$$

b) Falls $\{f_x(s): x\in X\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, dann ist $\chi_s \in \hat{X}$.

Beweis: Vgl. [J], 6.3 und 7.3. □

2.1.4 Bemerkung

Sei G eine lokalkompakte Gruppe und B eine bezüglich der Birkoff-Topologie (= kompakt offene Topologie; siehe [M] und [B]) relativ kompakte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$, der Automorphismengruppe von G, und B enthalte $I(G)$, die Gruppe der inneren Automorphismen von G: $I(G) \subseteq B \subseteq \mathrm{Aut}(G)$. Dann ist (G,B), die Menge der B-Bahnen in G, eine Hypergruppe (Vgl. [J], 8.3 und A2.2a). Die Menge der Hypergruppencharaktere auf (G,B) ist $E(G,B)$, die Extremalpunkte der Menge der B-invarianten, positiv definiten, stetigen Funktionen auf G mit $p(e) = 1$. Die Funktionen in $E(G,B)$ erhält man zum Beispiel dadurch, daß man die stetigen, irreduziblen, unitären Darstellungen von G (d.h. die Charaktere, falls G abelsch ist) über die B-Bahnen in G mittelt. (Siehe [HHL] und [M], 5.1 und 5.2.) In [HHL] wird weiterhin gezeigt, daß der Funktionenraum $E(G,B)$ bezüglich punktweiser Multiplikation eine Hypergruppenstruktur birgt.
Damit wird eine breite Palette von Beispielen zum obigen Satz bereitgestellt. Hierzu ein

2.1.5 Beispiel

Sei $G = \mathbb{R}^n$ und $B = SO(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann läßt sich die Hypergruppe $K = (G,B)$ als Menge mit $\mathbb{R}_0^+$ identifizieren und die Charaktere sind gerade die Funktionen

$$B_s^{(\nu)}(x) := \beta_\nu \cdot J_\nu(sx)\cdot(sx)^{-\nu} = \alpha_\nu \int_0^\pi \exp(-sx\cdot\cos\vartheta)\,(\sin\vartheta)^{2\nu}\,d\vartheta .$$

Dabei sind $\nu = (n-2)/2$, s und $x \in \mathbb{R}_0^+$, α_ν und β_ν reelle Konstanten und J_ν die ν-te Besselfunktion (Vgl. [R3]).
(Man beachte, daß das obige Integral bis auf eine Konstante, die nur von ν bzw. n abhängt, mit dem folgenden übereinstimmt:

$$\int_{SO(n)} \exp(-i\cdot\langle \vec{s}, \sigma\vec{x}\rangle)\, dm(\sigma) ,$$

wobei $\vec{s}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{s}| = s$, $|\vec{x}| = x$ und m das normalisierte Haarsche Maß auf SO(n) ist.)

Nach obigen Bemerkungen ist daher $\hat{K} = \left\{B_s^{((n-2)/2)} : s \geq 0\right\}$ und $\hat{K}$ ist eine Hypergruppe bezüglich punktweiser Multiplikation.

2.1.6 Bemerkung

Falls G eine lokalkompakte Gruppe und H eine kompakte Untergruppe von G ist, dann läßt sich auf dem Doppelnebenklassenraum $G//H$ eine natürliche Hypergruppenstruktur erklären: Siehe [J], 8.2 B.

Für die weiteren Betrachtungen sei G kompakt: Zu $\alpha \in \hat{G}$, dem Dual von G, definiere man

$$\phi_\alpha(x) := \int_H \int_H \xi_\alpha(hxh')\, dm_H(h)\, dm_H(h') ,$$

wobei m_H das normalisierte Haarsche Maß auf H und ξ_α der zu α gehörige Charakter ist. (Zu den Definitionen siehe [DR], 7.2.5, 7.3.4 und 9.4.1). Diese ϕ_α (wobei $\alpha \in \hat{G}$) heißen sphärische Funktionen und sind H-biinvariant, können also als Funktionen auf $G//H$ betrachtet werden.

Wir wollen nun zusätzlich annehmen, daß $\phi_\alpha(e) \in \{0,1\}\ \forall\ \alpha \in \hat{G}$. In diesem Fall ist K kommutativ ([DR], 9.4.3). Falls $\phi_\alpha(e) = 1$, ist ϕ_α eine stetige, beschränkte, symmetrische und multiplikative Funktion auf K (siehe [DR], 9.4.2 (i), (iii) und (iv) sowie 9.4.6), das heißt $\phi_\alpha \in \hat{K}$. Also ist $S(K) := \{\phi_\alpha : \alpha \in \hat{G},\ \phi_\alpha(e) = 1\} \subseteq \hat{K}$. Andererseits ist aber $S(K) = \Delta L^1(K) \supseteq \hat{K}$ ([DR], 9.4.9); also ist $S(K) = \hat{K}$, der Dualraum von K.

Es scheinen noch keine handlichen Kriterien dafür bekannt zu sein, wann $\hat{K}$ selbst wieder eine Hypergruppe ist. Jedoch ist die Funktionenfamilie $\hat{K}$ ein natürlicher Kandidat zur Untersuchung auf eine Hypergruppenstruktur.

2.1.7 Beispiel

Für $n \geq 3$ sei $G = SO(n)$ und $H = \{1\} \times SO(n-1)$. Dann erfüllt das Paar (G,H) alle Voraussetzungen von 2.1.6 ([DR], 9.6.9). Der Doppelnebenklassenraum $K = G//H$ ist topologisch äquivalent zum Intervall $[-1,1]$ ([DR], 9.6.6), und die Charaktere auf K sind gerade die ultrasphärischen Polynome $R_m^{(\alpha,\alpha)}$

mit $\alpha = (n-3)/2$ und $n = 0, 1, \ldots$ (In [DR] ist die Indizierung der Polynome gerade um 1/2 verschoben.)

Diese Polynome bergen aber eine Hypergruppenstruktur, wie in 2.2 näher untersucht wird.

2.1.7 Bemerkung

Die letzten beiden Bemerkungen zeigen Wege auf, wie man Familien von Hypergruppen finden kann. Der Typ einer solchen Hypergruppe wird jeweils durch einen Index gekennzeichnet, welcher letztlich von der Dimension der zu Grunde liegenden Gruppe herrührt und daher nur diskrete Werte annimmt. Diese diskreten Werte scheinen auch in den speziellen Funktionen auf, welche die Hypergruppenstruktur unmittelbar festlegen. In den betrachteten Beispielen sind diese speziellen Funktionen, nämlich $B_s^{(\nu)}$ und $R_n^{(\alpha,\beta)}$, nicht nur für diese diskreten Werte von ν bzw. α und β definiert, sondern für ein ganzes Kontinuum davon.

Es liegt also die Frage nahe, ob diese Funktionen auch dann auf Hypergruppenstrukturen führen, wenn sie nicht wie zuvor beschrieben in natürlicher Weise durch Mittel-Bildung aus Gruppencharakteren entstanden sind. Dies wird im Fall der oben genannten Funktionenfamilien im folgenden untersucht.

Weitere Untersuchungen von Funktionenklassen, die von Strukturen ähnlich denen von $(\mathbb{R}^n, SO(n))$ und $SO(n)/\!/(\{1\} \times SO(n-1))$ herrühren, würden sich anbieten.

2.2 Hypergruppenstrukturen auf Sequenzen von Jacobi-Polynomen

Diese wurden von Lasser in einem größeren Rahmen eingehend untersucht (siehe [L 3]). Wir beschränken uns daher darauf, die wichtigsten Resultate zu zitieren.

Seien $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ ein für alle Mal fest gewählt. Wir betrachten die Familie $(R_n^{(\alpha,\beta)} := P_n^{(\alpha,\beta)}/P_n^{(\alpha,\beta)}(1))_n$ von normalisierten Jacobipolynomen als Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$. Dann gilt für $n,m \in \mathbb{N}_0$ die Linearisierungsformel

$$R_n^{(\alpha,\beta)} R_m^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n,m,k)\, R_k^{(\alpha,\beta)} .$$

In [G2] gibt Gasper die Koeffizienten $g(n,m,k)$ explizit an und zeigt, daß sie stets nicht-negativ sind. Die Familie $(R_n^{(\alpha,\beta)})_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt daher (F3); die Axiome (F2) und (F4) gelten trivialerweise, da $\mathbb{N}_0$ diskret ist. (F1) folgt aus den Identitäten $R_0^{(\alpha,\beta)}(x) = R_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$ für alle $x\in[-1,1]$, $n\in\mathbb{N}_0$, und (F5) folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Polynome $R_n^{(\alpha,\beta)}$. Aus der Formel für $g(n,m,k)$ (siehe [G2]) ist zu entnehmen, daß $g(n,m,0)$ dann und nur dann nicht verschwindet, wenn $n = m =: n^-$ ist. Dies zeigt (F6). Also wurde Folgendes nachgewiesen:

2.2.1 Satz

Für $n,m \in \mathbb{N}_0$ definiere man $p_n * p_m := \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n,m,k)\cdot p_k$ mit $g(n,m,k)$ wie oben und setze $*$ auf $M(\mathbb{N}_0)$ fort. Dann ist $K = K^{(\alpha,\beta)} := (\mathbb{N}_0, *)$ eine kommutative Hypergruppe.

Weiterhin gilt die folgende

2.2.2 Proposition

$K = K^{(\alpha,\beta)}$ sei wie im Satz.

a) Das bei 0 normalisierte Haarsche Maß ist gegeben durch

$$\underline{h(0)} := 1 , \quad \underline{h(n)} := \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)_n\ (\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)\ n!\ (\beta+1)_n} \quad n\in\mathbb{N};$$

(Hierbei bedeutet $(a)_k := a(a+1)\ \ldots\ (a+k-1)$)

b) $\hat{K} = ([-1,1], *)$ (wobei $p_x * p_y$ in [L3], 4(a) beschrieben ist) ist eine Hypergruppe.

c) $\hat{\hat{K}}$ ist ebenfalls eine kommutative Hypergruppe, und $\hat{\hat{K}} \cong K$, das heißt, K ist eine starke Hypergruppe.

d) Ein Haarsches Maß auf $\hat{K}$ ist gegeben durch $(1-x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}\,dx$, $x\in[-1,1]$.

Beweis:

a) Siehe [L 3], 3(a).

b) Siehe [L3], 4(a) .

c) [L3], Proposition 2 .

d) [L3], Kommentar vor Proposition 5; man beachte, daß

$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ das Orthogonalitätsmaß von $R_n^{(\alpha,\beta)}$ ist. □

2.3 Hypergruppenstrukturen auf Klassen von Bessel-Funktionen

Viele der in diesem Kapitel behandelten Eigenschaften von Bessel-Funktionen und assoziierten Algebren von Funktionen können auch in [S 2] gefunden werden; zum Teil sind sie daraus übernommen. Jedoch scheint die von Bessel-Funktionen herrührende Hypergruppenstruktur auf $\mathbb{R}_0^+$ noch nirgens explizit dargestellt worden zu sein, abgesehen von einigen singulären Beispielen in [J], 9.3 und [L1]. Neben dem Angebot, bekannte Sachverhalte in einem neuen Rahmen, dem der Hypergruppenstruktur, zu sehen bringt dieses und die damit verwandten Kapitel 3.3, 4.3 und 5.4 einige, anscheinend auch inhaltlich neue Resultate, wie zum Beispiel das Haarsche Maß und Ergänzungen zur Spektraltheorie.

2.3.1 Definition

Sei $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > -1/2$ ein für alle Mal fest gewählt. Für $s, x \in \mathbb{R}_0^+$ definiere man

$$\underline{B_x(s) = B_x^{(\nu)}(s)} := J_\nu(sx)\cdot(sx)^{-\nu}2^{\nu}\cdot\Gamma(\nu+1)$$

$$\text{d.h.}\quad B_x^{(\nu)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(xs/2)^{2k}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+\nu+1)}\qquad \text{(Vgl. A4.1)}$$

(B ist eine in x und s holomorphe Funktion.)

Für Funktionen obiger Art hat Gegenbauer eine "Linearisierungsformel" entwickelt, die in [W], 11.41 Gleichung (16) zu finden ist:

$$2^{\nu}\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\cdot\frac{J_\nu(y)}{y^\nu} = \int_0^{\pi}\frac{J_\nu\big((x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2}\big)}{(x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2\,\nu}}\cdot\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\nu > -1/2$.

Also gilt die folgende Identität:

$$B_x^{(\nu)}(s)\,B_y^{(\nu)}(s) = c_\nu\int_0^{\pi} B^{(\nu)}_{(x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2}}(s)\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi\quad ,$$

wobei $\quad \underline{c_\nu} := \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}$.

Mittels der Substitution $\quad z = (x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi)^{1/2}$ erhält man daraus:

$$B_x^{(\nu)}(s)\, B_y^{(\nu)}(s) = \int B_z^{(\nu)}(s)\, dm_{x,y}(z),$$

$$\text{wobei} \quad dm_{x,y}(z) = \begin{cases} 2z\cdot(2xy)^{-2\nu}\left[(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)\right. \\ \qquad \left.(-x+y+z)\right]^{\nu-1/2} & \text{für } |x-y| \le z \le x+y \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesen Betrachtungen ist der Einstieg geschafft zu dem folgenden

<u>2.3.2 Satz</u>

Für $\nu > -1/2$, $x,y \in \mathbb{R}_0^+$ sei $p_x * p_y := m_{x,y} \in M(K)$, $m_{x,y}$ definiert wie oben. Dann ist $\underline{K} = \underline{K_\nu} := (\mathbb{R}_0^+, *)$ eine kommutative Hypergruppe. ($*$ sei dabei erweitert auf ganz $M(K) \times M(K)$.)

Beweis: Es genügt, die Axiome (F1) bis (F6) nachzuweisen:

(F1): Aus der Reihendarstellung in 2.3.1 sieht man, daß $B_0(s) = B_x(0) = 1$ für alle $s,x \in \mathbb{R}_0^+$.

(F2): Sei $f \in C_{00}(\mathbb{R}_0^+)$ beliebig; dann ist

$$\int f\, dm_{x,y} = c_\nu \int_0^\pi f((x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2})\, \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi$$

Da die Abbildung $(x,y) \longmapsto (x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2}$ gleichgradig in φ stetig ist, gilt:

$\lim\limits_{i\to\infty} \int f\, dm_{x_i,y_i} = \int f\, dm_{x,y}$, falls nur

$\lim\limits_{i\to\infty} (x_i, y_i) = (x,y)$.

Dies zeigt die Stetigkeit der Abbildung $(x,y) \longmapsto m_{x,y}$.

(F3): Hier sei nur erwähnt, daß jeder der Terme $(x+y+z)$, $(x+y-z)$, $(x-y+z)$ und $(-x+y+z)$ nicht-negativ ist, falls $|x-y| \le z \le x+y$. Der Rest ist klar.

(F4): Offensichtlich ist $\operatorname{spt}(p_x * p_y) = \left[\,|x-y|\,,\, x+y\,\right]$, und somit ist (F4) evident.

(F5): Steht wörtlich in [S2], Lemma 1.1d.

(F 6): Die Involution ist hier die Identität, da

$$0 \in \operatorname{spt}(p_x * p_y) = \big[|x-y|\,,\; x+y\big] \text{ genau dann wenn } x=y. \;\square$$

2.3.3 Bemerkung

Die Linearisierungsformel von Gegenbauer ist für alle $\nu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ gültig. Für nicht-reelle ν ist jedoch das Axiom (F 3) nicht erfüllt, denn $m_{x,y}$ ist dann im allgemeinen kein positives Maß mehr. Die Beschränkung auf reelle ν ist also unumgänglich, wenn man die Hypergruppenaxiomatik von Jewett erfüllt haben will.

2.3.4 Proposition

Auf K_ν ist ein Haarsches Maß gegeben durch

$\underline{dm(z) = dm_\nu(z)} := (\Gamma(\nu+1)2^\nu)^{-1}\, z^{2\nu+1}\, dz$.

Beweis: Zu zeigen ist: $p_x * m = m \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$

(Sei $\underline{e_\nu} := (2^\nu\Gamma(\nu+1))^{-1}$.)

$$p_x * m = e_\nu \int_0^\infty (p_x * p_y)\, y^{2\nu+1}\, dy$$

$$= e_\nu \int_0^\infty \int_{|x-y|}^{x+y} c_\nu\, p_z \cdot \Big\{2z\cdot(2xy)^{-2\nu}\big[(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)\big]^{\nu-\frac12}\Big\} dz\; y^{2\nu+1}\, dy$$

$$= e_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty c_\nu\, p_z \{\ldots\}\, A(x,y,z)\, dz\; y^{2\nu+1}\, dy$$

wobei $A(x,y,z) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |x-y| \le z \le x+y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$;

$A(x,y,z)$ ist symmetrisch in x, y und z !

$$= e_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty c_\nu \{\ldots\}\, A(x,y,z)\, y^{2\nu+1}\, dy\; p_z\, dz$$

$$= e_\nu \int_0^\infty c_\nu \int_{|x-z|}^{x+z} \Big\{2z\,(2xy)^{-2\nu}\,[\ldots]^{\nu-\frac12}\Big\}\cdot y^{2\nu+1}\, dy\; p_z\, dz$$

$$= e_\nu \int_0^\infty z^{2\nu+1}\, c_\nu \int_{|x-z|}^{x+z} 1\cdot\Big\{2y\,(2xz)^{-2\nu}\cdot[\ldots]^{\nu-\frac12}\Big\}\, dy\; p_z\, dz$$

$$= e_\nu \int_0^\infty z^{2\nu+1}\, \mathbb{1}(x*z)\, p_z\, dz$$

$$= e_\nu \int_0^\infty z^{2\nu+1} \, p_z \, dz = m . \quad \square$$

2.3.5 Satz

Sei K_ν wie in 2.3.2; dann ist $\hat{K}_\nu \cong K_\nu$.

Beweis:

(i) Nach Gegenbauers Integralformel ist

$$B_x^{(\nu)}(s*t) = B_x^{(\nu)}(s) \cdot B_x^{(\nu)}(t) \quad .$$

Da alle $B_x^{(\nu)}$ beschränkt und reellwertig sind, ist $\{B_x^{(\nu)} : x \in \mathbb{R}_0^+\} \subseteq \hat{K}$. (Vgl. [J], 6.3 und 7.3)

(ii) Nach [S 2], 4.4 korrespondiert zu jedem nichttrivialen Algebra-Homomorphismus ψ auf $M(K_\nu)$ ($\hat{=}$ M_ν in der Notation von Schwartz) ein $y = y(\psi) \in \mathbb{R}_0^+$ in folgender Weise:

$$\psi(\mu) = \int B_y^{(\nu)}(x) \, d\mu(x) \, .$$

Nach [J], 6.3F und 7.3 ist aber $\Delta(M(K_\nu)) = \mathcal{X}_b(K_\nu) \supseteq \hat{K}_\nu$, ergo $\{B_x^{(\nu)} : x \in \mathbb{R}_0^+\} \supseteq \hat{K}$.

(iii) Mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta ist $\{B_x^{(\nu)} : x \in \mathbb{R}_0^+\}$ homeomorph zu $\mathbb{R}_0^+$ und die Faltungsstruktur dieser Funktionen entspricht der in 2.3.2 beschriebenen. Also ist $\hat{K}_\nu \cong K_\nu$ als Hypergruppe. (Vgl. dazu auch [J], 12.4) $\square$

2.3.6 Bemerkung

Im Grenzfall $\nu = -1/2$ ist $B_x^{(\nu)}(s) = \cos(xs)$, wie man aus der Definition ersehen kann. Es gilt dann die Linearisierungsformel $B_x^{(\nu)} \cdot B_y^{(\nu)} = \frac{1}{2}(B_{|x-y|}^{(\nu)} + B_{x+y}^{(\nu)})$.

Daraus ergibt sich die Hypergruppe $K_{-1/2} = (\mathbb{R}, (id,-id))$. Man überprüft, daß 2.3.4 und 2.3.5 entsprechend gelten.