1. Einleitung

Man muß zwar nicht gerade bis zur griechischen Antike zurückgehen, um die Ursprünge der speziellen Funktionen zu finden, aber es gibt dennoch genug Berechtigung, sie als ein klassisches Gebiet der Mathematik zu betrachten. Carlson verfolgt in [C] ihre Geschichte zurück bis in die Mitte des 17. Jahrhunderts und begleitet ihren Aufstieg, bis sie im 19. Jahrhundert, -eng verknüpft mit der komplexen Funktionentheorie-, ihr goldenes Zeitalter erleben. Die Analysis der Jahrhundertwende, überliefert in Whittakers Buch "A Course of Modern Analysis", war gerade die Vereinigung dieser beiden Gebiete. Danach wurden die speziellen Funktionen sehr lange Zeit vernachlässigt, die allgemeineren Betrachtungen der Funktionalanalysis rückten in den Vordergrund. So ist es bezeichnend, daß Watsons Buch über Bessel-Funktionen, das bereits im Jahre 1922 erstmals erschien, auch heute noch als Standardwerk angesehen wird.

Erst in den letzten Jahren haben die speziellen Funktionen wieder zunehmend Beachtung gefunden: Man beschäftigt sich dabei vor allem mit dem physikalisch relevanten, aber auch für die reine Mathematik interessanten Problem der Entwicklung (das heißt Darstellung durch Reihen oder Integrale) möglichst vieler Funktionen nach einer vorgegebenen Klasse von speziellen Funktionen. Die in Frage kommenden speziellen Funktionen sind dabei in aller Regel Eigenfunktionen eines Differentialoperators zu verschiedenen Eigenwerten. Die oben erwähnte Entwicklung liefert also eine Diagonalisierung des zugrunde liegenden Differentialoperators. Die Aufgabe der klassischen harmonischen Analyse ist es, Funktionen nach Charakteren von lokalkompakten abelschen Gruppen zu entwickeln. Es liegt daher nahe, das obige Problem auch der harmonischen Analyse, in einem etwas weiteren Sinn verstanden, zuzuordenen. In der Tat ergeben sich bei solchen Untersuchungen erstaunliche Analogien zur klassischen harmonischen Analyse, obwohl anscheinend keine Gruppenstruktur zugrunde liegt. Nur in einigen singulären Fällen konnten spezielle Funktionen mit geeignet gemittelten Charakteren von gewissen Lie-Gruppen identifiziert werden (Siehe zum Beispiel [K]). Was bisher fehlte, war ein einheitliches Konzept, das zum einen die Behandlung möglichst vieler Klassen von speziellen Funktionen und vielleicht auch noch topologischer Gruppen erlaubt und andererseits doch geeignet ist, um "schöne" Aussagen herzuleiten. " Can one find an underlying structure?" fragt Carlson in seinem 1977 erschienenen Buch über spezielle Funktionen ([C]).

Eine solche Struktur hat erstmals Lasser in [L 3] für eine Vielzahl von orthogonalen Polynomsequenzen angegeben: Es handelt sich dabei um die Hypergruppenstruktur, einer Verallgemeinerung von lokalkompakten Gruppen, welche die meisten Schlußfolgerungen aus der klassischen harmonischen Analysis zuläßt (siehe dazu auch A 2). Daß dieses Konzept nicht nur für orthogonale Polynome anwendbar ist, zeigt die vorliegende Arbeit, in der auch Bessel-Funktionen dahingehend untersucht werden. Es ist anzunehmen, daß noch weitere Klassen von speziellen Funktionen eine Hypergruppenstruktur bergen.

Anhand von Jacobi-Polynomen und Bessel-Funktionen wird in dieser Arbeit die Nützlichkeit und Eleganz der Betrachtung durch die Hypergruppenstruktur demonstriert: Viele der bekannten, bisher zusammenhangslosen Ergebnisse können dadurch in einen neuen, einheitlicheren Rahmen gesetzt werden und ihre Beweise reduzieren sich zu elementaren Anwendungen der Hypergruppentheorie. Andere Resultate, insbesondere im Abschnitt über Spektralsynthese, konnten in der Literatur nicht gefunden werden und scheinen neu zu sein.

Untersucht werden in dieser Arbeit zunächst die Beziehungen zwischen Hypergruppen und speziellen Funktionenklassen im allgemeinen, sowie einfache Folgerungen daraus und dann einige klassische Gebiete der harmonischen Analyse, wie Fouriertransformationen, Spektralsynthese und Mittelbarkeit. Dabei treten verblüffende Paralellen zwischen den Bessel-Funktionen und den Jacobi-Polynomen zutage; zwei Funktionenklassen, die auf den ersten Blick keine Gemeinsamkeiten haben.

Zuletzt noch ein Wort zum Aufbau der vorliegenden Arbeit: Die Festlegung der Notation, sowie viele grundlegende Definitionen und Eigenschaften, insbesondere von Hypergruppen (von denen man stets annehme,daß sie ein Haarsches Maß besitzen), Jacobi-Polynomen und Bessel-Funktionen wurden in den Anhang verbannt, ebenso wie zwei ziemlich lange, aber rein technische Beweise. Auf diese Weise wurde der Hautteil, nämlich Abschnitt 2 bis 5 von solchem Ballast freigehalten, und man kann sich dort auf die eigentliche Zielsetzung dieser Arbeit konzentrieren.